



NAZIONALE
8
42 B
20
IOTECA
CENTRALE V. E. II
MA

COMMERCIUM
EPISTOLICUM,

DE

Quæstionibus quibusdam *Mathematicis* nuper habitum.



Inter Nobilissimos Viros

D. *Gulielmum* Vicecomitem *Brouncker*, *Anglum*;

D. *Kenelmum Digby*, item Equitem *Anglum*;

D. *Fermatium*, in suprema *Tholosanum* Curia Iudicem Primarium;

D. *Freniclum*, Nobilem *Parisinum*.



Una cum

D. *Joh. Wallis* Geomet: Profess: *Oxonii*.

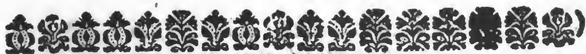
D. *Franc: a Schooten*, Math: Prof: *Lugduni Batavorum*; Aliisque.

Edidit *JOHANNES WALLIS*, S. Th. D. in celeberrima *Oxoniensi* Academia Geometriæ Professor *Savilianus*.

OXONII,

Excudebat *A. Lichfield*, Acad. Typograph. Impensis *Tho. Robinson*, M. DC. LVIII.





Illustrissimo, Nobilissimoque Viro,

D. KENELMO DIGBY.

EQUITI ANGLO.

D. D.

Johannes Wallis.

EQues Illustrissime Nobilissimeque,



Voties apud me recogito, quam multiplici me obligatum tenes beneficio, despero plane, nec ulla mihi superest expectatio, favores tuos vel meritis exæquandi, vel pares tantis beneficiis rependendi gratias. Neque tam aliis me superiorem difficultatibus fas est existimare, quam vel Te dignis vel Tibi debitis gratiis rependendis prorsus imparem. Insignis utique honoris loco, nec facile æstimandi, habere debeo; quod me nec expetentem, nec ad hoc honoris aspirantem, dignatus fueris favore tuo prosequi; sed & insuper me meaq; aliis summis viris ultro commendata dederis. Verum & de rebus & fama nostra non secus fueris solicitus, eisque promovendis sedulus, quam si tua res agatur. Tuum siquidem est, Tibique in solidum debetur, tum quod in tuum ipsius, tum & aliorum simul illustrium virorum commercium me advocaveris; eaque ab illis de nobis elogia obtinueris, quæ & superant quicquid ego inde mihi expectare possem, nedum polliceri, quæque mihi salvâ modestiâ nunquam vendicare potero. Quamvis enim problemata nonnulla

tum Arithmetica tum Geometrica à Clarissimis Viris Fermatio & Frenicló *proposita (quos, quod ais, ut summos in hisce rebus Gallia suspicit,) ad mandatum tuum fuimus aggressi, & soluta dedimus, vel Honoratissimus Vicecomes* Brouncker, *vel & ipse; non tamen ut inde vel Hercules aut Samsones habeamur, vel ex summis hujus ævi Magistris (quæ nobis erubescentibus à summis viris collata vidimus encomia) ullatenus expectavimus, nedum vendicamus : saltem ego; (nolim etenim Nobilissimi Vicecomitis, Doctissimique, meritis derogatum ire.) Sed & summis hisce viris debentur gratiæ (quas meo nomine reponas oro) qui & commercio suo dignati sunt, & me humaniter acceperunt. Neque enim imputandum puto siquid disceptantibus durius exciderit. Atque eosdem item oratos velim, ut siquid vel meo vel Honoratissimi Vicecomitis nomine liberius protulimus, eosve non satis pro dignitate sua compellavimus, me excusatum habeant, morum & dignitatum istius gentis ignarum, ut qui in tam Illustres & summos viros non lubens peccarem. A Te tandem, Eques Illustrissime; quem, favore tuo audaciores facti, toties lassavimus, veniam pro laude peto. Nec dedigneris, oro, quod tua Tibi denuo porrexerim; utpote quorum pars longe maxima vel à te vel ad te scripta. Cui & publicas deberi gratias profitemur, qui Te tam sedulum patronum Gentis Anglicanæ, deque illorum fama tam solicitum tum hic tum alias præstitisti: Si id saltem erroris condonetur, quod me tam tenuem atque imbellem pugilem; cum his Athletis decertaturum evocaveris. Utut enim, in præsenti negotio, haud plane infeliciter rem transegisse videamur, nolim tamen ut ex tenuitatis meæ modulo Anglorum vires æstimentur. Vale, Vir Insignissime, diuque vivas, bonarum literarum strenuus promotor, & Anglicanæ gentis ornamentum.*

COM-

COMMERCIUM EPISTOLICUM DE
Quæstionibus quibusdam *Mathematicis*, nuper habitum.



EPISTOLA I.

D. *Vicecomitis Brouncker ad* D. *Joh. Wallis. Oxonium.*



EX literis tuis, Vir Clarissime, 22. *Feb.* datis, persentio quam Tibi sim obstrictus, & quibus me devinctum habes obligationes crescentes indies. Quod enim quâ in te usus sum libertatem benignè dignatus es interpretari, id ego justi habeo beneficii loco, quamobrem & animitus rependo gratias. Inclusam quam cum his habebis chartulam, à D. *White* hesterno die accepi, quam ut tibi transmitterem à me petebat. Propositionem existimo difficiliorem futuram quam prima fronte videatur; secus enim eum quem præ se ferre video titulum vix merebitur. Ut ut sit, non dubito quin illam cito sis soluturus; quod & aliquando fortasse faciet

5. Martii. 1656/7 *Fidissimus amicus, tuique observantissimus,*

BROUNCKER

Inclusa charta sic erat inscripta.

A challenge from M. Fermat, *for D.* Wallis,
With the hearty commendations of the messenger,
Thomas White.

PRoponatur (si placet) *Wallisio*, & reliquis Angliæ Mathematicis, sequens quæstio numerica.

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum. Exempli gratia. Numerus 343. est Cubus,

à latere 7. Omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49; quæ adjunctæ ipsi 343. conficiunt numerum 400, qui est quadratus à latere 20.

Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiet numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia aut Galliæ Belgica & Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis, easque in pignus nascentis amicitiæ D. *Digby* offeret & dicabit.

EPISTOLA II.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Vicecom. Brouncker. Londinum.*

Literas tuas (Honoratissime Domine) pridie datas, hesterna nocte accepi, cum inclusa simul D. *Fermatii Charta*. Est autem ea quæstio ejusdem fere generis cum iis quæ de numeris Perfectis (ut loquuntur) & Deficientibus aut Redundantibus exponi solent Problematis, aliisque id genus, quæ ad universalem aliquam æquationem, quæ ad omnes casus respiciat, vix aut ne vix reducuntur. quicquid autem id sit, cum jam me multiplici negotio occupatissimum deprehendat, non vacat ei statim attendere. Id saltem impresentiarum habeat responsi loco; *Unum eundemque numerum* 1, *utrique quæsitio satisfacere*. Sed & sui similem liceat hanc quæstionem proponere; *Invenire duos numeros quadratos, qui partibus sui aliquotis additi, eandem efficiant summam.* Exempli gratia; $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 25 + 5 + 1$. Inveniantur ejusmodi alii duo. Denique salutem D^ni^. V^æ^ precatus optimam, & observantiam officiose testatus, me velim reputes,

Oxonii Mart. 7. 1656/7. *Honoratissime Domine,*
Dnis. Væ. Servum Obsequentissimum,

J. WALLIS.

Statim post has literas, ab eodem D. Fermatio (quasi post habitis prioribus, quas uti videtur D. Freniclus interea solverat) allata est ad D. Vicecom. Brouncker quæstio tertia, cujus itē solutionem

tionem unà cum solutionibus præcedentium, brevi scripto ad D. White (à quo acceperat) indicabat, eodem (ni fallor) Mense Martio, (quas & idem D. White Parisios transmisit.) Verum cum istius scripti nullum apud se retinuerit exemplar D. Vicecomes, non possumus illud hic verbatim inserere; sed illius summa deinceps recensebitur *Epist.* IX. Hinc autem factum est, quod ulteriori præcedentium solutioni deinceps non incubuimus, utpote quas author ipse visus est negligere, substitutâ in earum locum tertia cui magis confidebat; quam & propediem solverat D. Vicecomes.

EPISTOLA. III.

D. *Vicecomitis Brouncker*, ad D. *J. Wallis*.

INclusam hanc, Vir Clarissime, D. Fermatii Epistolam ad Illustrissimum equitem D. Kenelmum Digby conscriptam, à D. White hesternâ nocte accepi; quam & tibi jam prima occasione data offerendam censui. Quod nondum sibi plene persuasum sit de veritate tuæ quadraturæ Circuli, ego facile credo; Quippe, ni fallor, tractatum illum non nisi leviter inspexit. Secus enim advertisset, credo, ex prop. 101, 102, 103, 104, 105, contrarium istius, quod, de Hyperbolis suis Infinitis verba faciens, videtur innuere, Quod nempe *Tu figuras illas non fueris contemplatus.* Quæ de centro Gravitatis, in figuris illis habet, virum illum indicant eam quam de illo famam accepimus merentem. Eritque tibi, credo, uti & mihi, non ingratum, demonstrationem videre, quique rem illam spectat, canonem quem innuit generalem. Denique, cum hoc quod mittitur sit Autographum, expectabit, credo, D. White ut ipsum illi restituam; remittas itaque, oro,

Londini Maii 30. 1657. *Vir Clarissime,*

Amico tuo fidissimo, tuique observantissimo,

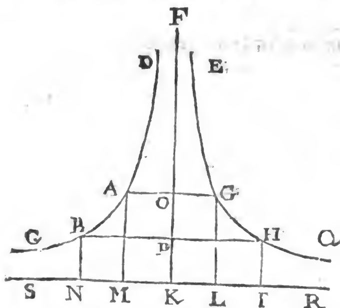
BROUNCKER.

EPISTOLA IV.

D. *Fermatii ad* D. *Kenelmum Digby Equitem Anglum: (præcedenti inclusa.)* Parisios.

Monsieur,

PUis que Vous voules, que les compliments cessent, soit faict. Il me suffist de vous asseurer une fois pour toutes, que vous vous estes tres-justement acquis un pouvoir absolu sur moy, & que je ne perdray point d' occasion à vous le tesmoigner. J' ay leu l' *Arithmetica Infinitorum* de Wallisius, & j' en estime beaucoup l' Autheur. Et bien que la quadrature tant des paraboles, que des hyperboles infinies ait esté faicte par moy depuis fort longues années, & que j' en aye autres fois entretenu l' illustre Toricelli, je ne laisse pas d' estimer l' invention de Wallisius, qui sans doubte n'a pas sçeu, que j' eusse preoccupé son travail. Voicy une de mes propositions aux termes que je la conceus en l' envoyant à Toricelli. Soyent les deux droictes S K R, & K O F. Et soyent descrites les courbes E G H Q d'un costé, & D A B C de l'autre, en forme d' hyperboles, dont les asymptotes soyent les droictes premierement données. Soyent encore tirées A G, B H, paralleles à S K R, & les droictes B N, A M, G L, H I, paralleles à K O F. En l' hyperbole ordinaire le rectangle N P est esgal au rectangle M A O. Mais supposons maintenant, que le produict du quarré B N & de la droicte B P, soit esgal au produict du quarre M A & de la droicte A O. En ce cas la courbe sera une nouvelle hyperbole, dont la proprieté sera, que le parallelogramme B I sera esgal à l' e-



espace

ſpace compris ſoubs la baſſe BH, & les deux courbes BADF, FEGH qui vont à l' infini du coſte de F. Que ſi le produict du cube BN & de la droicte BP, eſt eſgal au produict du cube AM & de la droicte AO, en ce cas ce ſera un autre hyperbole, dont la proprieté ſera, que le parallelogramme BI ſera double de l' eſpace compris ſoubs la baſe EH & les deux courbes en montant, ut ſuprá Et par regle generale, Si le produict d' une puiſſance de BN par une puiſſance de BP, eſt eſgal au produict d' une pareille puiſſance de MA par une pareille de AO, en ſupposant celles de BN & MA pareilles entre elles, comme auſſi celles de BP & de AO auſſi pareilles, le parallelogramme BI ſera a la figure prolongée à l' infini, ut ſupra, comme la difference de l' expoſant de la puiſſance de BN avec l' expoſant de la puiſſance de BP, eſt à l' expoſant de la puiſſance de BP. De ſorte qu'il ſuit delà, qu'en l' hyperbole ordinaire, l' eſpace dela figure prolongée à l' infini n' eſt point eſgal à un eſpace donné, par ce que l' expoſant des puiſſances eſtant le meſme ne donné aucune difference. Et pour faire que l' eſpace dela dite figure prolongée à l' infini ſoit eſgal à un eſpace donné, il faut que l' expoſant de BN ſoit plus grand que celuy de BP. comme il eſt aiſe de remarquer. Tout cecy quoyque non ſi un peu diverſement ſe peut tirer du livre de Wallisius. Mais il ne à pas faict une ſpeculation ſur ces figures, de laquelle il ſera ſans doubte bien aiſe d' eſtre adverti, & qui peut paſſer pour un des miracles dela Geometrie. Je l' ay autrefois donné à Toricelli auſſy bien que la precedente. C' eſt comme il arrive que quelques fois l' eſpace prolongé à l' infini, comme BADFEGH eſt auſſy infini, comme en l' hyperbole ordinaire, & quelques fois fini, comme en celles dont les expoſants de BN ſurmontent ceux de BP. On demande, ſi, lors que le dict eſpace prolongé à l' infini eſt eſgal à un eſpace fini, il à un centre de gravité fixe & certaine. Or il arrive un choſe merveilleuſe en cette recherche, & laquelle j'ay decouverte, & demonſtrée, c'eſt que quelques fois le dict eſpace quoyque fini n'à point de centre de gravité fixe, & quelques fois il en à. Car par exemple, lors que le produict du quarré BN, & dela droicte BP, eſt eſgal aux produicts ſemblablement tirés, la figure BADFEGH prolongée à l'infini qui en ce cas eſt eſgal au parallelogramme BI, n' à pourtant aucun cen-

 tre

tre de gravité. Mais si le produict, par exemple du cube BN & de la droicte BP est esgal aux produicts semblables & semblablement tirés, en ce cas non seulement l'espace de la figure prolongée à l'infini, est esgal à un espace donné, qui est, comme nous avons dit, la moitié du parallelogramme BI, mais encore cette figure prolongée à l'infini à un centre de gravité, qui va en ce cas en la ligne PF coupée en telle sorte au point O, que la ligne PO soit esgalle à la ligne KP. Et ce point O sera le dict centre de gravité de cette figure prolongée à l'infini. Si Monsieur Wallisius veut avoir la demonstration de cette proposition & de la regle generalle pour trouver les dicts centres de gravité, je vous l'envoyeray pour luy en faire part.

Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans son dict traicté, je n'en suis pas pleinement persuadé, car ce qui se deduit par comparaison en Geometrie, n'est pas tousiours veritable.

Je ne Vous parle pas ni de vostre livre, ni de celuy de Thomas Anglus, *ne sutor ultra crepidam.* Vous estes souverain en Physique, & je Vous recognois pour tel. J'espere pourtant au premier voyage Vous entretenir de la proportion que gardent les graves dans leur descente naturelle, de quoy vous avés traicte dans vostre livre que M. Bourel m'à fait la faveur de me faire voir. Je suis,

A Castres le 20.
Avril. 1657.

MONSIEUR,

Vostre treshumble, & tres-obeïssant serviteur,

FERMAT.

EPISTOLA V.

D. *Joh. Wallis ad illustrissimum Equitem* D. *Kenelmum Digby.*

NOn levem (Heros Nobilissime, Doctissimeque, laboris mei reputo mercedem, quod nostras qualescunque lucubrationes tum introspicere digneris ipse, tum & (quasi tanti essent) aliorum

fiorum ea de re rogare ſententiam. Quum enim celeberrimum Digbeii nomen, & eruditionem limatiſſimam, latere neminem patiantur (ut reliqua taceam) quæ in publicum emiſiſti ſcripta, omnigenâ eruditione refertiſſima; non parum illud laudis erit, ea enarrâſſe, quæ tanto viro, ſi non per omnia ſatisfaciant, tanti ſaltem videantur ut nec contemnas penitus. Quodque inſignem tuam clementiam, nobilitatis veræ comitem, ornat maximè, latentem plane, tibique aliàs ignotum penitus, & immerentem, hoc me honore cumulâſti. Perſentio utique ex literis illis, à Nobiliſſimo D. Fermatio ad te ſcriptis, (quas pro ſumma tua humanitate, curaveris per D. White mihi communicandas, eoque me tibi obligatum devinxeris,) tum Fermatii ea de re ſententiam rogâſſe tum & obtinuiſſe.

Verùm & Nobiliſſimo Fermatio eſt quod debeam, ut qui tum evolvere noſtra dignatus eſt, tum de eis ſententiam non ſine honore ferre; ſed & tum ea tum me propterea æſtimare: quod quidem à tanto viro, Matheſeos peritiſſimo, non eſt cur parvi faciam.

Quod autem exiſtimat Vir Nobiliſſimus, mihi neutiquam ſuboluiſſe, quid ipſe pridem de Parabolis Hyperboliſve quadrandis invenerat; id eouſque verum eſt, ut ne quidem, ſi memini, Fermatii nomen (liceat enim ignorantiam meam ingenue fateri) prius inaudiveram, quam quæ de hoc negotio tradidimus tum pridem ſcripta fuerant tum & impreſſa; neque enim ſi noveram diſſimulaſſem Et quidem beneficii loco æſtimo, vel hinc in tanti viri notitiam perveniſſe, tantum abeſt ut inventis ego ſuis quidquam derogatum velim: Magis utique velim, ut quæ apud ſe premit inventa, (quæ quidem egregia plane fore mihi facile perſuadeo,) publici juris faceret, nec invideret orbi literato.

Ad ea interim quæ præſens exhibet Epiſtola, omnino parum eſt quod dicam. *Novas* illic quas appellat *Hyperbolas*, à ſe quadratas, ipſiſſimæ ſunt figuræ quas in mea *Infinitorum Arithmetica* quadrandas docui prop. 102. Sicut & quæ habetur prop. 103. Eſt vera Hyperbola, (quod & indicatum eſt prop. 95.) Quas autem excludit ipſe, tanquam Quadraturæ incapaces, eaſdem ego excluſeram (neque enim de aliis apud me atque illum agitur) prop. 104. Verum & (quod neſcio an ipſe ſatis adverterit) hæ curvæ prop. 104. Non aliæ ſunt ab illis prop. 102. Sed eædem ipſiſſimæ

ipsissimæ, ex altera parte continuatæ; quod & insinuavimus prop. 105.

Unde autem factum sit quod ex hujusmodi figuris infinitè continuatis, aliæ sint item magnitudine infinitæ, aliæ verò non nisi finitæ, adeoque finitis spaciis æquales, id ipsum etiam à nobis traditum est in Scholio prop. 101. ubi, ni fallor, genuina & proxima mirandi hujus symptomatis causa traditur: quæ num coincidat cum ea quam Toricellio Fermatius assignaverat, haud valeam affirmare, nisi & hanc suam noverim.

Verùm si Nobilissimo Viro visum fuerit, vel suam Parabolarum aut Hyperbolarum quadrandarum methodum indicare, vel etiam, κριτήειον illud quo figuras ejusmodi magnitudine infinitas à finitis distinguit, veramque Symptomatis rationem; erit & illud mihi pergratissimum. Quanquam enim horum utrumque mea methodo, ut dictum est, præstitimus; non tamen eousque nostris inventis arrogare soleo, vel etiam indulgere, ut aliorum propterea negligenda duxerim.

Quod & de eis quæ centrum gravitatis spectant intellectum velim. Quam totam ego speculationem consultò omisi. Quanquam enim, ex iisdem quibus utor principiis, de gravitatis centro tum in Parabolis omnigenis, tum & aliis figuris quamplurimis sive planis sive solidis, facile esset statuere, mihique etiam aliquando in animo fuerit ad hæc divertere; Ne tamen in Digressionibus nimius essem, nimisque abrumperem Theorematum filum; aut perplexæ materiæ varietate nimia lectorem enecarem; tum hac, tum aliis item speculationibus quamplurimis non injucundis, plane abstinendum censui, contentus interim nonnunquam, digito (in Scholiis) intento, consultò prætermissa indicare, & non raro etiam ne hoc quidem.

Quod vero hujusmodi inventorum suorum Vir Nobilissimus mihi copiam facere, modò illud expetam, humanissimè pollicetur; hoc quidem mihi, modò illi grave non fuerit, fore pergratissimum sciat velim; utpote à quo nihil non accuratum, nihil non sublime, mihi polliceor.

Quod denique de Circuli Quadratura à nobis tradita, sibi haud usque quaque persuasum adhuc esse subindicaverit; eo præsertim, quòd quæ ex comparationibus in Geometria deducantur, haud ita sempèr succedant, quin à veritate nonnunquam aberrent

rent: Ego quidem facile patior Cl. V. hac ex parte ſuſpicacem eſſe, donec rem accuratius excuſſerit, ut qui noverim quam in lubrico loco res ea conſiſtat & lapſui proclivis ſit. Verùm hoc me, hujus minime ignarum, magis itaque ſuſpenſum tenuit & ſolicitum, & quantum potui perſpicacem, per totum itineris decurſum, nequid hujuſmodi mihi aliquando imponat incauto, & in devia ſeducat. Quod & tantâ cum cautelâ factum eſſe confido, ut nullis uſpiam hujuſmodi comparationibus uſus fuerim, niſi quæ & Geometricum examen ferre poſſint, & quibus ſubſit juſtæ demonſtrationis fundamentum, utut illud non prolixe ſemper proſecutus fuerim, quò & operoſo labori noſtro, & lectoris tædio, proſpectum ſit: quod &, ſicubi quis hæreat, facilè ſupplebitur. Et quidem, quod ad rei ſummam attinet, ne admiſſi erroris nimium ſim ſolicitus, id etiam facit, quòd Honoratiſſimus D. Gulielmus Vicecomes Brouncker, harum rerum callentiſſimus, (cujus non ſine honore ſummo mentio facienda erat ad prop. 191.) calculi numeroſi examen adhibens, & ad decimum uſque locum perducens, invenit ex voto omnia ſuccedere. Rationem quippe Perimetri ad Diametrum inde colligit,

$$\left\{\begin{matrix}\text{majorem quam } 3.14159,26535,69+\\ \text{minorem quam } 3.14159,26536,96+\end{matrix}\right\}\text{ad } 1:$$

(quæ cum numeris Ludovici van Kulen, & aliorum, conveniunt:) Sed &, in toto proceſſu, alternatim nunc excedentem, nunc deficientem, ut oportuit: ut non dubium ſit quin eo rite pervenerim.

Atque hæc ſunt, Heros Nobiliſſime, quæ ad Fermatii Epiſtolam dicenda duxerim; quæ & ipſi, ſi tibi viſum fuerit, liceat impertire. Id ſupereſt ut, de hoc quo me dignatus es honore, teſtatus gratitudinem, omniaque tibi felicia precatus, me tandem profitear,

Oxoniæ, Junii 6. 1657.

Nobiliſſime Domine,

Tui obſervantiſſimum pariter & obſequentiſſimum Tibi,

J. WALLIS.

EPISTOLA VI.

D. *Kenelmi Digby ad* D. *Wallis.*

Most honoured and worthy Sir,

THe letter you have done me the favour and honour to write me of the 6. of June, came to this towne for me when I was absent from it; and immediately upon my returne, I was seized upon by a sickenesse (the reliques of a greater I had at *Poictiers*) which hath till now hindered me from giving you those humble thankes and paying you that obliged respect which I owe you. And now that I am going about it, I find my selfe to fall very short of what I either desire or ought to do. For, seeing that the measure of all civilities or obligations, is to be taken, either from the dignity of the person that conferreth them, or from the merit of him that receiveth them; I find in both those so huge a disproportion (in my present occurrent) that it is no obsequiousnesse of language or endearingnesse of expressions, that can ballance them. I will not therefore embark my selfe in that impossible taske; but seeing it is meerely your goodnesse that hath disposed you to be thus kind and favourable to me; I will have recourse to the same goodnesse, in beseeching you to accept of the profession I here make you with all truth and sincerity, that as I honor most highly your great parts and worth, and the noble productions of your large and knowing minde (which maketh you the honor of our nation, and the envy of all others,) so I entitle you to the right of commanding alwayes whatsoever may depend of me for your service, and I will upon all occasions seale it with as ready a performance as you can wish from the most acquired friend and servant you have.

My health hath not permitted me to write to Monf. Fermat till yesterday (the post-day for *Tholose*) that I withall have sent him a copy of your letter to me, What I shall receive from him

in

in returne thereof, I will presently acquaint you with: and do thinke my selfe very happy & much honoured to be the mediator of a communication between two so great personages. I make account M. White will send you the copy of a late letter from Monsr. Fermat to me, that I now send him to shew my Lord Brouncker before he conveyeth it to you, because he is mentioned in it. I conceive that my Lords letters were not well translated to Monsr.Fermat: But for his doubting that my Lords solution of his Probleme is not a good one because he maketh slight of it, is no good argument, as Monsr. de Frenicle hath shewed by experience: for, the same Probleme being shewed him (as a challenge to all the Mathematicians of Europe) he gave the persõ that brought it him, fuor Solutions (in four severall numbers) immediatly, and sent him six more the next morning together with a further Problem built upon his, forhim to solve; which I beleeve may prove very tough worke to him.

I must not take leave of you, till I have spoken a word or two of your worthy Colleague Doctor Ward. It is some time since I have heard of his booke against M. Hobbes. And M. White had sent it over hither for me whiles I was in *Languedoc*; But I had not seene it till now, that I have greedily read it over with much content and pleasure. Onely, where he is pleased to speake advantagiously of me beyond my merit (exceedingly beyond it) my blood stil came with blushes into my cheekes, through shame for not being able to correspond with the Idæa he rayseth of me; and shame being a kind of griefe, you will easily believe that unmerited prayses must be heavy to me. Yet to confesse truly to you, I cannot so far weane my selfe from vanity, as not to be touched and delighted (in a very high manner) with what so learned and brave a man speaketh favourably of me. I will end this point concerning him, with beseeching you to present my most humble service to him (for I conceive, you see him often) with most harty and obliged thankes for his excessive civilities to me, together with assurance that I esteeme and honour him with all my heart. It is a worthy Triumvirate that you two and Doctor Wilkins do exercise in literature and all that is worthy. Your names are famous abroad; and I heare of you from sundry hands; but from none more largely or

more affectionately then from M. White; whom, your goodnesses have wonne to be entirely yours; and he amply expresseth it upon all occasions. But I am too ample in disturbing your great and manifold employments. I crave your pardon for it; and do assure you that I am, and will ever approve my selfe,

From Paris the
1. Aug. of 1657.

Worthy Sir,

Your Most humble and most
obedient servant,

KENELME DIGBY.

EPISTOLA VII.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby.*

Right Noble Sir,

VPon sight of your extremely civill letter of the 7. of August, which I had the honour two dayes since to receive from you, it is not easy to say how much I found my self surprized; knowing how little I had deserved from so noble a hand, and how small a share was due to mee of what you are pleased so liberally to impute. I was ashamed, I confesse, to think how little I durst own, of that honour you put upon mee; and should have blushed deeply, had not the suddennesse of that surprizall so much appaled mee. And when I thought of any reply, I found that you had therein prevented mee; in saying so much of what I ought to have sayd, that, unlesse I would transcribe and return you back your own words again (for better I could not) I had nothing left to say. And yet this I durst not; for fear of polluting that language, which I cannot presume to imitate, by so rude a pen. If you will but favour mee so far, as to peruse the copy of your own letter, & interpret the greatest part thereof as sayd by mee, as an acknowledgement of those civilities which I could not deserve, and a disclaiming of those deserts which I must

must not own; you will there find a better answer & in language more befitting your noble self, than you can possibly upon any other account expect frõ me. For though I do not pretend to any skill at Tennis; yet am I very sensible, that I must not suffer, but at my greatest hazard, so much obsequious language, & expressions of obliging goodnesse, to rest at mee, without returning them to the same hand from whence they came: And though I am not able to return them with that grace and dexterity where with they were sent; Yet I humbly beseech you to beleeve, that it is not for want of any reality of affection or readynesse to serve you, that I fall short of what in duty I ow, to one whom I so much honour. I must confesse, I could not without some pleasing content (*neque enim mihi cornea fibra est*) see my self so highly honoured, however undeserving, by so fair a character, though much unlike mee, drawn by so brave a hand; (as Ladies who are sometimes pleased in seeing their pictures flatter them;) and should bee extreme proud of it (were I not conscious how little there is in me to answere it;) as coming frõ so gallant a person; whose authority is able to give credit to his opinion therein.

Those other two Gentlemen whom you are pleased to joyn mee with in your good opinion, D. Wilkins and D. Ward; I shall, upon their returns hither, acquaint how much they are obliged to you for that honour you put upon them. I can onely at present; from those great respects which I know they have for you, assure you that they are very much your servants. And wee must all acknowledge ourselves deeply indebted to M. White, who is pleased not onely to judge so favourably of us, but to represent us to you in such a Character as hath gained us so advantagious a place in your opinion.

The probleme to which you refer, of Monf. Fermat, as a challenge to all the mathematicians of Europe; was that, I suppose, of which I had from the L. Brouncker a copy, in these words,

Invenire cubum qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratũ. Exempli gratia, Numerus 343 est cubus, a latere 7; omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1,7,49, quæ adjunctæ ipsi 343 conficiunt numerum 400, qui est quadratus à latere 20. Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus quadratus qui additus omnibus suis

partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si *Anglia*, aut *Gallia Belgica* & *Celtica* non dederint, dabit *Gallia Narbonensis*, easque in pignus amicitiæ nascentis D. Digby offeret & dicabit.

To which I gave no other solution at the present, but *That the number 1 satisfied both his problems.* Subjoining by way of returne, another of the like nature, (which for ought I know may prove as hard as either of his two;) *viz.*

Invenire duos numeros quadratos, qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam. Exempli gratia $16+8+4+2+1=31=25+5+1$. Inveniantur ejusmodi alii duo.

But I added withall, that I looked upon problems of this nature, (of which it is easy to contrive a great many in a little time,) to have more in them of labour than either of Use or Difficulty.

Since that time I have spent no further thoughts about it. For being just then called from home by the death of a neer friend: Before I got home again I understood that my Lord Brouncker had both resolved those two, and also a latter problem from the same hand, on which I understood that (waving the former inquiry) Mons. Fermat did lay a greater stresse, as more considerable then those former. Which probleme being both received and answered, before I heard ought of it; I conceived it needlesse for mee *actū agere*. What his Lordships solution of this latter probleme was, I am not able to tell, nor so much as what was the probleme; not having any Copy of either. But I know his Lordship so well, and his peculiar dexterity in things of that nature; that I have a very strong presumption of the accuratenesse of what hee doth in such a way.

That other letter of Mons. Fermat to your self, of which you intimate that I may expect a Copy from M. White, is not yet come at mee; it's possible it may be yet lodged in my L. Brounckers hand, to whom it was first to be communicated. I can onely, for that and all other your noble favours, tender you my very humble thanks, being in no capacity of making any valuable retaliation; your reward being onely the conscience of your own generous inclination to heap favours on those from whom you can expect no recompense,

I shall

I shall onely adde a few words and kiss your noble hands. And 'tis but this; that since you have been willing to give your self the trouble, and us the honour, of imparting papers betwixt Monf. Fermat and my self, I thought it not wholly incongruous to subjoine a Theorem, which if it shall so seem good to you, you may transmit to him to be demonstrated;not as a challenge, nor as a matter of any extraordinary difficulty (for I do not take it so to bee:) but such as in the solution of it may probably suggest to him (if hee know it not allready) a pretty handsome speculation, which possibly may be not unwellcome to him. The Theoreme is this.

Sit Pyramidis vel Coni Frustum (parallelis planis abscissum;) cujus basis major æquetur quadrato rectæ A; minor, quadrato rectæ E; altitudo F. Dico. Si cruribus A,E, (vel his æqualibus) constituatur angulus graduum 120; & circumscribatur circulus; Quadratum Radii circuli sic descripti in altitudinem frusti ductum, (R q F) æquatur Frusto.

The Demonstration of it, or whatever at any time I shall bee in any capacity to serve you in; you may command at pleasure from him who accounts it a great honour to be and to bee reputed,

Oxford Sept.3.
St.Vet.1657.

Right Noble Sir,

Your affectionate and very humble servant

JOHN WALLIS.

EPISTOLA VIII.

D. *Vicecomitis Brouncker*, ad D. *J. Wallis*.

TUam, Vir Clarissime, quinto hujus scriptam hesterno die recepi; ut & illam ad D Kenelmum Digby, quæ quam maturè potero ad illum transmittetur. Quam autem memoras a D. Kenelmo Digby ad D. White missam, ut nobis impertiatur, nondum accepi, neque de illa quicquam inaudiveram. Ubi illam accepero,

accepero, tibi tranſmittendam curabo. Interim en tibi, quam petis, D. Fermatii quæſtionem tertiam, meique ad illam reſponſi ſummam; (ipſa ſiquidem verba neſcio exhibere, cum eorundem nullum apud me apographum retinuerim:) quod tamen feciſſem ſi putaſſem D. White reſponſum illud eadem forma fuiſſe tranſmiſſurum. Poteris, ſi tibi videbitur, Latine tandem tranſmittere, ut non ſit cur de Idiomate Anglicano deinceps conquerantur, vel ob illud hæreant. Interea, tum ob nuperos tuos, tum & priſtinos favores, repenſis gratiis; certo ſcias velim, quam tibi ſim,

Sept. 11. 1657. *Clariſſime Vir,*

Amicus fideliſſimus, atque humillime ſervus:

BROUNCKER.

D. Fermatii Scriptum, hoc erat.

QUæſtiones pure Arithmeticas vix eſt qui proponat, vix qui intelligat: Annon quia Arithmetica fuit hactenus tractata Geometricè potius quam Arithmetice? Id ſane innuunt pleraque & Veterum & Recentiorum volumina. Innuit & ipſe Diophantus, qui licet à Geometria paulò magis quam cæteri diſceſſerit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adſtringit: Eam tamen partem Geometriâ non omnino vacare probant ſatis ſuperque Zetetica Vietæa; in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur. Doctrinam itaque de numeris integris, tanquam peculiare ſibi vendicat Arithmetica patrimonium. Eam apud Euclidem leviter duntaxat in elementis adumbratam; ab iis autem qui ſecuti ſunt, non ſatis excultam, (niſi forte in iis Diophanti libris quos injuria temporis abſtulit, deliteſcat,) aut promovere ſtudeant ἀριθμητικῶν παῖδες aut renovare. Quibus ut præviam lucem præferamus, Theorema ſeu Problema ſequens, aut demonſtrandum aut conſtruendum proponimus. Hoc autem ſi invenerint, fatebuntur hujuſmodi quæſtiones nec ſubtilitate, nec difficultate, nec ratione demonſtrandi,

ſtrandi, celebrioribus ex Geometria eſſe inferiores.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in datum numerum ducti, adſcitâ unitate, conficiant quadratum. Exemplum. Datur 3, numerus non-quadratus; ille ductus in quadratum 1, adſcitâ unitate, conficit 4, qui eſt quadratus. Item idem 3 ductus in quadratum 16, adſcitâ unitate, facit 49, qui eſt quadratus. Et loco 1 & 16, poſſunt alii infiniti quadrati idem præſtantes inveniri. Sed Canonem Generalem, Dato quovis numero non-quadrato, inquirimus. Quæratur, verbi gratia, quadratus, qui ductus in 149, aut 109, aut 433, &c, adſcitâ unitate conficiat quadratum.

EPISTOLA. IX.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby.*

Nobiliſſime Domine,

POſt nuperas meas ad Te miſſas (Sept. 3. datas,) Accepi ab Honoratiſſimo Domino, D. Vicecomite Brouncker, D. Fermatii Problema ad illum miſſum, cum ipſius ejuſdem ſolutione. Quæ quia (quod ſuſpicaris) fieri poſſit ut D. Fermatio fuerit perperam expoſita, eandem placet hic ſubjungere, unâ cum hiſce Dominationi Veſtræ offerendam.

D. F*ermatii Problema.*

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in illum ducti, adſcitâ unitate, conficiant quadratum. E. G. $2 \times 16, + 1. = 49 = 7 \times 7.$

Quæritur Generalis Canon quo ejuſmodi quadrati reperiantur.

En autem ejuſmodi Canon duplex. Alter D. *Vicecomitis Brouncker:*

Sit N, numerus datus quilibet, (quadratus aut non-quadratus, integer aut fractus:) Q, alius quilibet quadratus (integer aut fractus;) cujus radix R. Sit D, = Q ∾ N, (duorum Q, N, differentia;) Puta Q-N, vel N-Q.

Canon. Eſt $\frac{4Q}{Dq}$ $\left(= \frac{2R}{D} \times \frac{2R}{D}\right)$ numerus quadratus, qui in N ductus, adſcitâ unitate conficiet quadratum.

$\times \frac{4Q}{Dq}, +1. = \frac{4QN+Dq}{Dq}$. Nam $\frac{4QN+Dq}{Dq} =$

$\frac{4QN+Qq-2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq} = \frac{Qq+2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq} = \frac{Q+N}{Q-N} \times \frac{Q+N}{Q-N}$.

Alter meus; quoad formam processus, paulò universalior; quoad numeros autem inventos, plane idem.

Sit N, numerus datus quilibet. A, quilibet ad arbitrium assumptus: per quem Q, quadratus quilibet, dividatur; quotientem exhibens M. Sit P, numerus quilibet; D, differentia duorum $\frac{M}{4P}A \sim PN$.

Canon. Est $\frac{MA}{Dq}$ numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate, conficiet quadratum, $N \times \frac{MA}{Dq}, +1. = \frac{MAN+Dq}{Dq}$.

Nam

$$\frac{MAN+Dq}{Dq} = \frac{\frac{MqAq}{16Pq} + \frac{1}{2}MAN + PqNq}{\frac{MqAq}{16Pq} - \frac{1}{2}MAN + PqNq} = \frac{\frac{MA}{4P} + PN}{\frac{MA}{4P} - PN} \times \frac{\frac{MA}{4P} + PN}{\frac{MA}{4P} - PN}.$$

Monendum denique quod solutioni suæ subjunxit D. *Vicecomes. Nempe*

Prioribus duobus D. Fermatii quæsitis, reponendum censuit, non modo numerum 1, sed & (si fractiones admittantur) numerum 1 per cujusvis integri potestatem sextam divisum, utrique quæsito satisfacere; (quippe qui tum quadratus est, tum cubus, & partes aliquotas nullas habet:) Sed & duorum priori satisfacere, non modo numerum 343 (quem innuit D. Fermatius) sed & eundem per cujusvis integri potestatem sextam divisum. Puta $\frac{343}{64}$. Siquidem numerus Fractus, cum partes non alias habeat actuales, quam quæ toti sunt cognomines; non alias habebit partes aliquotas expositus cubus $\frac{343}{64}$, quam $\frac{1}{64}, \frac{7}{64}, \frac{49}{64}$, quæ cū

ipso

ipso $\frac{343}{64}$, conficiunt $\frac{400}{64}$, numerum quadratum.

Habes itaque, Vir Illustrissime, eorum summam quæ dudum de his Problematis responderat Honoratissimus Vicecomes. Id superest, ut siquo pacto rebus tuis molesta fuerit importuna hæc interpellatio, veniam humillimus exorem,

Oxonii Sept.
27. 1657.

Illustrissime Domine,
Observantissimo Tui, Tibique obstrictissimo,
J. WALLIS.

EPISTOLA X.
D. *Vicecom. Brouncker*, *ad* D. *Joh. Wallis*.

Accepi, Vir Clarissime, inclusas hasce binas literas, quas à D. Kenelmo Digby allatas, tradebat heri D. White. qui & tertias mihi ostendebat, quæ referebant D. Frenicle solvisse unam ex Propositionibus quas inclusæ literæ memorant, (eandem, ni fallor, de qua antehac audivimus, sed nondum videramus,) viz. *Treuver deux nombres cubes dont la summe soit esgal à deux autres nombres cubes*. Nempe sic;
1729=C9+C10=C1+C12. 4104=C9+C15=C2+C16. 13832=C18+C20=C2+C24. 32832=C18+C30=C4+C32. 39312=C15+C33=C2+C34. 40033=C16+C33=C9+C34. 20683=C19+C24=C10+C27. Verum de posteriore parte propositionis, viz. *Treuver deux nombres Cubes dont la summe soit Cube*, nihil dictum est. Perlectis autem hisce quas mitto literis, visum est mihi ultimas tuas ad D. Kenelmum Digby revocare, ni saltem jam nimis serò id velim, (atque in hunc finem ea de re scripsi ad D. White,) ut nempe ejusdem loco plenius responsum habeat ad Fermatii problema, quod jam de solis integris exponit, secus quam pridem fecerat. Quid autem mihi de hoc negotio visum sit, brevi accipies, ab

Octob. 3. 1657.

Amico tibi fidelissimo, simul & devinctissimo servo,
BROUNCKER.

EPISTOLA XI.

D. *Fermatii ad* D. *Kenelmum Digby. quæ, cum sequente, præcedenti includebatur.*

Monsieur,

J'ay receu vostre derniere lettre à la veille du départ de M. Borel, qui ne me donne quasi pas le loisir de vous faire un mot de response. Vos deux lettres *Angloises* m'ont esté traduites par un jeune *Anglois*, qui est en cette ville, & qui n'à point cognoissance de ces matieres; de sorte que sa traduction s'est trouvé si peu intelligible, que je n'y ay peu discouvrir aucun sens reglé; & ainsi je ne puis vous resoudre, si ce mylord à satisfaict à mes questions, ou non. Il me semble pourtant au travers l'obscurité de cette traduction bourrüe, que l'Autheur des lettres à trouvé mes questions un peu trop aisées; ce qui me faict croire, qu'il ne les a pas resolües. Et par ce qu'il pourroit equivoquer sur le sens de mes propositions, j'ay demandé un nombre cube en nombres entiers, lequel adjousté à toutes ses parties aliquotes face un nombre quarré. J'ay donné par exemple 343, qui est cube, & aussi nombre entier, lequel ajousté à toutes ses parties aliquotes faict 400, qui est un nombre quarré. Et par ce que cette question reçoit plusieurs autres solutions, je demande un autre nombre cube en entiers, qui joinct à toutes ses parties aliquotes face un nombre quarré; Et si le Mylord Brouncker respond, qu'en entiers il n'y à que le seul nombre 343, qui satisface à la question, je vous promets, & à luy aussi, de le desabuser en luy en exhibant un autre. Je demandois encore un quarré en entiers, qui joinct à toutes ses parties aliquotes face un cube. Pour la question proposée dans l'escrit Latin, que je Vous envoyay elle est aussi en nombres entieres. Et partant les resolutions en fractions (lesquelles peuvent estre d'abord fournies à quolibet de trivio Arithmetico) ne me satisferoyent pas. Je suis avec respect,

A Castres le 6. Juin 1657.

MONSIEUR,

Vostre tresbumble, & tresobeisant serviteur,

FERMAT.

EPI-

EPISTOLA XII.

D. *Fermatii ad* D. *Kenelmum Digby.*

Monsieur,

J'ay receu avec joye & satisfaction vostre dernier pacquet, & quand il ne contiendroit autre nouvelle, que celle de vostre convalescence, & du retour de vostre santé, c'est un bien si grand, & si considerable pour tous ceux, qui aiment les belles lettres, qu'ils ne peuvent en recevoir un plaisir mediocre. J'ay receu la copie de la lettre de Monsieur Wallis, que je estime comme je dois, & j'advoüe, que ses figures sont les mesmes que les miennes; & que ses conclusions pour leur quadrature sont aussy les mesmes; mais sa façon de demonstrer, qui est fondée sur induction plustost que sur un raisonnement à la mode d'Archimede, faira quelque peine aux novices, qui veulent des syllogismes demonstratifs depuis le commencement jusqu'à la fin. Ce n'est pas que je ne l'approuve, mais toutes ses propositions pouvant estre demonstrées *viâ ordinariâ, legitimâ & Archimedeâ* en beaucoup moins de paroles, que n'en contient son livre, je ne sçay pas, pourquoy il à preferé cette maniere par notes Algebriques à l'ancienne, qui est & plus convainquante, & plus elegante, ansi que j'espere luy faire voir à mon premier loisir. Je voudrois qu'en suite il eust determine les centres de gravité de ces hyperboles infinies en distinguant celles qui en ont, d'avec celles qui n'en ont pas: car tandis qu'il dira, que la chose luy est cognüe, & qu'il n'en à pas voulu charger son livre, il ne me persuadera pas: Et d'autant plus, que la proposition generalle sans demonstration me suffira de sa part; Et je vous responds à l'advance, qu'elle ne sçauroit contenir plus de huict, ou dix lignes. Dés qu'il me l'aura envoyée, je luy fairay part de ma speculation sur ce subject, & de ma façon de demonstrer.

Pour les questions des nombres, j'ose Vous dire avec respect & sans rien abbattre de la haute opinion, que j'ay de vostre Nation, que les deux lettres de My Lord Brouncker, quoy qu'obscures à mon esgard & mal traduites, n'en contiennent point aucune solution. Ce n'est pas que je pretende par là renouveller les

 joustes



jouftes & les anciens coups de lances, que les Anglois ont autrefois fait contre les Francois. Mais fans fortir de la Metaphore, j' ose Vous fouftenir, & à Vous Monfieur, plus juftement qu' à tout autre, qui excellés aux deux meftiers, que le hafard, & le bonheur fe meflent quelquefois aux combats de fcience auſſy bien qu' aux autres, Et qu' en tout cas nous pouvons dire, que *non omnis fert omnia tellus.* —Je feray pourtant ravi d' eftre deftrompé par cét ingenieux et fçavant Seigneur, & pour luy tefmoigner, que noftre combat ne fera point à outrance, je me relafche dans la queftion fuivante, que je m' en vay luy propofer, de la rigueur de mes premieres queftions, qui ne vouloyent que des nombres entiers : il me fuffira, qu' ils foyent rationaux à la mode de Diophante. Le nom de cét Autheur me donne l' occafiõ de Vous faire fouvenir de la promeffe, qu' il Vous à pleu me faire de recouvrer quelque manufcrit de cét Autheur, qui contienne tous les treize livres, & de m' en faire part, s' il vous peut tomber en main. Voicy la nouvelle queftion ou pour My lord Brouncker, ou pour Mõſieur Wallis, que j' efcris en Latin fuivant voftre ordre.

Datum numerum ex duobus numeris cubis compoſitum dividere in duos alios numeros cubos.

Hanc propoſitionem in quadratis tantùm exequutus eſt Diophantus. In cubis ne tentavit quidem, in iis ſaltem libris, qui ad nos de majore ipſius opere pervenerunt.

Exempli gratiâ proponatur numerus 28. ex duobus Cubis 1, & 27. compoſitus, oportet dictum numerum 28. in duos alios Cubos rationales dividere, & propoſitionis ſolutionem generaliter præſtare.

Je confens, que M. Frenicle l' entreprenne, je fuis perfuadé, qu' il ne la trouvera pas fi aifée, que les autres, que je fçavois eftre de fa jurif-diction. Je l' eftime extraordinairement auſſy bien que vous, mais pourtant ce que je m' en vay adjoufter, l' eftonnera, fi vous prenés la peine de le luy communiquer. Je luy avois efcrit, qu' il n'y a qu' un feul nombre quarré en entiers, qui joinct au binaire face un cube, & que le dict quarré eft 25, auquel fi vous adjouftés 2, il fe fait 27. qui eft cube. Il a peine à croire cette propofition negative, & la trouve trop hardie & trop generalle. Mais pour augmenter fon eftonnement, je dis que fi on cherche un quarré, qui adjoufté à 4 face un cube, il n' en trouvera jamais que deux en nõbres entiers, fçavoir 4 & 121; car 4. adjoufte

adjousté à 4. faict 8, qui est cube : & 121 adjousté à 4 faict 125: qui est aussi cube : mais apres cela toute l'infinité des nombres n'en sçauroit furnir un troisiesme, qui ait la mesme propriete.

Je ne sçay ce que diront vos Anglois de ces propositions negatives, & si les trouveront trop hardies. J'attens leur resolution, & celle de Monsieur Frenicle, qui n'a point respondu a une longue lettre, que M. Borel luy rendit de ma part, dequoy je suis surpris, car je luy respondois exactement a toutes ses doubtes, & luy faisois quelque question de mon chef, dont je attends la solution. Je suis avec grand respect,

A Castres le 15.
Aoust 1657. *MONSIEUR*,

Vostre treshumble & tres-
obeïssant serviteur,
FERMAT.

J'oublioís de vous dire, que M. Borel a escrit a son pere, que M. l'Ambr. de Hollande s'estonnoit, dequoy je n'avois pas respondu a Schooten qui pretend avoir resolu mes questions, & m'en avoir propose d'autres. Mais je vous asseure, que je n'ay rien veu de sa part, & que si vous m'en envoyes Copie; j'y respondray.

J'ay mis la proposition un peu plus generalle dans la page suivante ou elle me semble estre mieux. On la peut concevoir pour M. Frenicle, qui aime les nombres entiers en ces termes.

Trouver deux nombres cubes, dont la somme soit cube : & trouver deux nombres cubes, dont la somme soit esgalle a deux autres nombres cubes.

Proposuit Diophantus datum numerum quadratum in duos quadratos dividere.

Item. Datum numerum ex duobus quadratis compositum in duos alios quadratos dividere.

Quaestionem autem ad cubos evehere, nec ipse, nec Vieta tentavit.

Quidni igitur famosam propositionem, & recentioribus reservatam analysis, expedire aut dubitemus, aut differamus?

Proponatur itaque, datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere.

Item.

Item. Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales diuidere.

Et *inquiratur, quid ea de re* Anglia, *quid* Hollandia *censeat?*

EPISTOLA XIII.

D. *Vicecomitis Brouncker*, ad D. *J. Wallis.*

ID solum indicant Vir Clarissime, præsentes literæ, inclusam quam habes Fermatii chartam a D. White mihi perlatam heri post meridiem, tibi impertiendam, cujus nempe oblitus erat cum reliquæ mitterentur. Petit autem ut tum hæc tum reliquæ, sibi restituantur. Id superest ut redamare pergas,

Octob. 6. 1657.

Fidissimum tibi, tuique observantissimum
BROUNCKER.

Remarques sur l' Arithmetique des Infinis du S. J. Wallis.

1. EN son Epistre il declare, comment il s'est mis à la recherche de la Quadrature du Cercle, & dit que quelques verites, qui ont esté discouvertes en Geometrie, luy ont donne l' esperance, qu' elle se pourroit trouver. Ces verites sont,

Que la raison des cercles infinis du Cone aux infinis du Cylindre est cognüe, sçavoir celle du Cone au Cylindre, qui a mesme base & hauteur : & pareillement la raison des Diametres des dits Cercles, sçavoir celle du Triangle, qui passe par l' Axe du Cone, au parallelogramme, qui passe par l' Axe du Cylindre.

Comme aussy on a la raison du Conoïde parabolique au Cylindre circoscrit, & celle de la parabole au parallelogramme, qui passent par leurs Axes, qui sont comme l' assemblage des Diametres des Cercles infinis, qui composent les dits solides.

Deplus, qu' on a aussy trouvé la raison des ordonnées tant au Triangle, qu' au Conoide parabolique, ou parabole, qui sont les Diametres des dits Cercles.

D' ou

D' ou il conclud, que puis qu'on a trouvé aussy la raison de la Sphere au Cylindre circonscrit, ou celle de l' infinité des Cercles paralleles, dont on peut concevoir que la Sphere est composée, à pareille multitude de ceux qui se peuvent feindre au Cylindre; on pourra aussy esperer de pouvoir descouvrir la raison des ordonnées en la Sphere, ou au Cercle, à celle du Cylindre, ou quarré, sçavoir la raison des Diametres des Cercles infinis, qui composent la Sphere, aux Diametres des Cercles du Cylindre; ce qui seroit avoir la quadrature du Cercle.

Mais de mesme qu'on ne pourroit pas avoir la raison de tous les Diametres pris ensemble des Cercles, qui composent le Cone, à ceux du Cylindre circonscrit, si on n' avoit la Quadrature du Triangle: non plus que la raison des Diametres des Cercles qui composent le Conoïde parabolique, à ceux qui font le Cylindre circonscrit, si on n' avoit la Quadrature de la Parabole. Ainsy on ne pourra pas cognoistre la raison des Diametres de tous les Cercles, qui composent la Sphere, à ceux des Cercles, qui composent le Cylindre circonscrit; si on n' a pas la Quadrature du Cercle. Car de demander la raison, qu' il y à entre les Diametres de tous les Cercles Paralleles, qu' on peut concevoir en la Sphere (lesquels Diametres pris tous ensemble, ne sont autre chose, qu' un Cercle) & ceux des Cercles, qu' on peut feindre au Cylindre circonscrit (lesquels font un quarré circonscrit audit Cercle) cela n' est autre chose, que de demander la raison du Cercle au Quarré circonscrit.

2. En la mesme Epistre apres avoir posé une suite de nombres, sçavoir 1. 6. 30. 140. 630. il demande le terme moyen, qui doit estre mis entre 1 & 6. Je responde, que si on à esgard à la suite entiere des dits nombres, on ne peut poser aucun terme moyen entre les dits 1 & 6. pourcequ' en cette suite les nombres ne font pas une proportion continuë; mais en autant de façons, que l' un est cõparé à l' autre, autant font il de proportions differentes, de sorte que ce sont plusieurs proportions, ou progressions désjoinctes, & ainsy quand on prendroit un terme moyen entre 1 & 6. il n' auroit rien de commun avec les autres nõbres.

Toute la proportion ou suite, qu' on peut remarquer en ces nombres, consiste au raport, qu' ont entre eux les nombres, dont ils proviennent par multiplication, aux quels on voit une espece

de progreſſion Arithmetique ; neanmoins ne ſçauroit paſſer au nombres ſuſdits en telle ſorte que par iceluy on puiſſe donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correſpondance à toute la ſuite : au contraire la proprieté meſme de cette progreſſion faict, qu' il n' y en peut avoir. Voicy comment.

Les nombres donnés 1. 6. 30. 140. 630. ſont produis par les ſuivans en multipliant, 1, $4\frac{2}{1}$, $4\frac{2}{2}$, $4\frac{2}{3}$, $4\frac{2}{4}$. ou les equivalens 1, $\frac{6}{1}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{14}{3}$, $\frac{18}{4}$.

En ces nombres, qui ſervent à faire les donnés, il eſt facile à voir, ou eſt le raport : Il conſiſte aux premiers, en la ſeule augmentation du denominateur de la fraction, qui y eſt joincte ; ce qui fait diminüer les nombres d' autant plus, qu' ils s' eſloignent du premier terme, ſçavoir de 1. & aux 2des 1. $\frac{6}{1}$. $\frac{10}{2}$. *&c.* (qui ſont les meſmes en autres termes) les numerateurs des fractions augmentent de 4, & les denominateurs de l' unite, ce qui fait pareillement diminüer les nombres, tant plus la progreſſion avance ; en ſorte que celluy, qui eſt le plus proche du premier, terme 1, ſçavoir $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$. qui vaut *6*. eſt le plus grand de tous.

Il faut auſſy remarquer, que le raport des nombres de la dite progreſſion n' arrive pas juſques au premier terme 1. ou pluſtoſt ne commence pas des le 1er. terme, mais au ſecond ſeulement, qui eſt ſa borne ; De ſorte que ſi on vouloit augmenter les termes de la dite progreſſion, en la changeant & mettant un nombre moyen entre le 1er & le 2nd terme, ſçavoir entre 1 & $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, il ne faudroit pas avoir eſgard à 1, mais aux autres nombres $4\frac{2}{1}$ $4\frac{2}{2}$ $4\frac{2}{3}$ $4\frac{2}{4}$. ou à ces autres : qui ſont les meſmes $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{14}{3}$ $\frac{18}{4}$. car cette progreſſion n' auroit pas de ſuite, ſi on la commencoit par 1.

Puis donc qu' il ne faut pas avoir eſgard au 1er terme 1, qui n' a rien de commun avec les nombres de la dite progreſſion ; mais aux autres ſeulement ; & qu' ils augmentent à meſure, qu' ils approchent du 1er terme 1. il s' en ſuit, que le nombre, qu' on prendroit entre 1 & $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ ſeroit plus grand, que ledit $\frac{6}{1}$. ou *6*. & il faudroit multiplie, le 1er terme 1, par ce nombre moyen, qui ſeroit plus grand que *6*, pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premierement donnes, qui ſont 1 & *6*. (car les dits nombres donnes 1. *6*. 30. 140. 630. n' ont point d' autre raport ou liaiſon, que celle, qu' ils empruntent de leurs multipli-

multiplicateurs, autrement ils n' en ont aucune) & ainsy on auroit un nombre plus grand que 6, pour le moyen terme d' entre 1, & 6. qui est absurde.

De la s' ensuit, qu' on ne peut donner le moyén terme entre 1 & 6, en tant qui sont compris en la suite ou progression des nombres 1. 6. 30. 140. 630.

On peut inferer dela, que la ligne courbe VC, n' est point esgalle en elle mesme, & qu' elle ne peut provenir d' aucun mouvement continu, qui soit esgal ou reglé; mais de plusieurs differens, suivant ses parties; & que c' est une ligne composée de portions de plusieurs courbes comprises entre les paralleles à l' axe VX de la figure: car en icelle il est bien necessaire, que la moyenne ligne tirée entre la 1ere & la 2de paralleles, sçavoir entre 1 & 6, soit moindre que 6. mais outre que cette moyenne ligne seroit de differente longueur suivant la nature & la propriete de cette portion de la courbe VC, qui n' a rien de commun avec les autres portions, comme a este dit; elle n' auroit rapport qu' avec les 2, termes, 1. 6. & non pas avec les autres, n' y avec les moyennes, qu' on auroit tirées entre deux, si on prenoit le tout conjoinctement.

3. En la 1ere propos. le dit Sr. Wallis propose une suite de quantites commenceans par 0, (qui represente le point) & qui se suivent en progression Arithmetique; & cherche quelle raison il y a entre la somme des dites quantites, & la somme d' autant de termes esgaux a la plus grande des données.

Le moyen qu' il donne pour trouver cette raison est de prendre les sommes de diverses quantites de nombres commençeans par les moindres; puis comparer les raisons les unes aux autres, & inferer de la une proposition universelle.

On se pouvoit servir de cette methode, si la demonstration de ce qui est propose estoit bien cachée; & qu' au paravant de s' engager a la chercher on se voulu asseurer à peu pres de la verite: mais il ne s' y faut fier que de bonne sorte, & on y doibt apporter les precautions necessaires; car on pourroit proposer telle chose & prendre telle regle pour la trouver, qu' elle seroit bonne à plusieurs particuliers, & neanmoins seroit fausse en effect, & non universelle; de sorte qu' il faut estre fort circonspect pour s' en servir; quoy qu' y apportant la diligence requise elle puisse estre

fort utile, mais non pas pour prendre pour fondement de quelque science, ce qu' on en aura deduit; comme faict le Sieur Wallis; car pour cela on ne se doibt contenter de rien moins, que d' une demonstration, & principalement au subject de la proposition, dont il s' agit; dont la solution & demonstration est fort facile.

Voicy, comme on demonstrera, que les dites quantites proposées, estans joinctes ensemble, font la moitie d' autant de quantites esgales à la plus grandes d' icelles.

Soyent exposées des quantites ou nombres, qui commencent par le point, ou par o. et qui se suivent en progression Arithmetique, & soyent celles de la 1re ligne.

1. *o. a. b. c. d.* Quantités données.
2. *d. d. d. d. d.* Quantités esgalles à la plus grande des données.
3. *d. c. b. a. o.* Exces des plus grandes par dessus les données.

Puisque les quantites données sont en progression Arithmetique, le 3me terme *b.* surpassera le 2nd de pareille quantite, que le 2nd (sçavoir *a.*) surpasse le 1er qui est o; mais l'exces de *a* par dessus o est *a*; & partant toutes ces quantites se surpasseront l' une l' autre de proche en proche, selon la quantite du 2nd terme *a*. Et si on prend les quantites de 2 en 2, laissant une d' icelles entre deux, comme sont *a*, *c*, ou *b*, *d*, de la premiere ligne; leur difference sera le 3me terme, comme il est evident: & de mesme si on les prenoit de 3, en 3; elles auroyent le 4me terme *c*, pour leur difference.

De la il s' ensuit, que si on prend autant de termes esgaux au plus grand terme *d*, des quantites données, comme en la 2de ligne; leur exces par dessus les quantites donées sera esgal aux dites quantites données; comme on voit en la 3me ligne. Car l' exces de *d*, par dessus la plus grande des quantites données, sçavoir par dessus *d*, est o, qui est le premier terme des quantites données; l' exces du mesme *d*, par dessus le terme precedant *c*, est le 2d terme *a*, comme il a este monstre; sçavoir pour ce que les 2 quantites *c* & *d*, sont prochaines: & ensuite l' exces du *d*, par dessus *b*, sera *b*; & ainsy des autres; jusques à ce, qu' en fin estant au premier terme o, l' exces de *d*, par dessus iceluy sera le mesme *d*: & ainsy la ligne des exces, qui est la troisiesme, sera esgale à la 1ere qui contient les quantites donnees. Mais la 1ere

&

& la 3me ligne estant joinctes ensemble; sçavoir les quantites donnees, estant joinctes aux exces des quantites de la 2de ligne par dessus celles de la 1ere, qui sont les donnees, font ladite 2de ligne, qui a chacun de ses termes esgal au plus grand de ceux de la 1ere, partant la 2de ligne, ou le plus grand terme des donnees, pris autant de fois, qu' il y a de termes, sera double de la 1ere ligne c' est à dire des quantites données. Ce qu' il falloit demonstrer.

4. En la seconde proposition il requiert, que le 1er terme soit 0, & le 2d 1. autrement il dit que *moderatio est adhibenda.*

A cela je dis, que si on commence par 0, quelque nombre, qu' on mette pour le second terme, la somme d' autant de fois le plus grand terme sera tousjours double des quantités données; car si pour *a, b, c, d*; on prend quelque nombres, qu' on voudra, qui soyent en progression Arithmetique depuis le 1er terme 0, cela succedera tous jours en la mesme sorte ainsy qu' il a esté cy devant demonstré.

EPISTOLA XIV.

D. *Vicecomitis Brouncker ad* D. *Joh. Wallis.*

Clarissime Vir,

POst acceptas D. Fermatii literas, quas ad te nuper transmisi, quæ Problema, pridem propositum, de solis integris exponunt; rem aliquatenus expendens, quadratos quos quærit infinitos (qui in datum non-quadratum ducti adscitâ unitate quadratos conficiant) in hujusmodi seriem video concidere. Nempe

$2 \times Q: 2 \times 5\frac{1}{2} \times 5\frac{2}{4} \times 5\frac{22}{35} \times 5\frac{162}{224} \times$ &c.

sic $8 \times Q: 1 \times 5\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{6} \times 5\frac{22}{35} \times 5\frac{162}{204} \times$ &c.

sic $18 \times Q: 4 \times 33\frac{1}{2} \times 33\frac{21}{34} \times 33\frac{1121}{1152} \times$ &c.

$32 \times Q: 3 \times 33\frac{1}{2} \times 33\frac{22}{34} \times 33\frac{1121}{1152} \times$ &c.

$3 \times Q: 1 \times 3\frac{1}{2} \times 3\frac{2}{4} \times 3\frac{11}{21} \times 3\frac{61}{94}$ &c.

12 × Q: 2 × 13 $\frac{1}{1}$ × 13 $\frac{13}{14}$ × 13 $\frac{181}{195}$ × &c.

27 × Q: 5 × 51 $\frac{1}{1}$ × 51 $\frac{51}{52}$ × &c.

48 × Q: 1 × 13 $\frac{1}{1}$ × 13 $\frac{13}{14}$ × 13 $\frac{181}{195}$ × &c.

75 × Q: 3 × 51 $\frac{1}{1}$ × 51 $\frac{51}{52}$ × &c.

5 × Q: 4 × 17 $\frac{1}{1}$ × 17 $\frac{17}{18}$ × 17 $\frac{305}{323}$ × &c.

20 × Q: 2 × 17 $\frac{1}{1}$ × 17 $\frac{17}{18}$ × 17 $\frac{305}{323}$ × &c.

80 × Q: 1 × 17 $\frac{1}{1}$ × 17 $\frac{17}{18}$ × 17 $\frac{305}{323}$ × &c.

6 × Q: 2 × 9 $\frac{1}{1}$ × 9 $\frac{9}{10}$ × 9 $\frac{89}{99}$ × 9 $\frac{881}{980}$ × &c.

24 × Q: 1 × 9 $\frac{1}{1}$ × 9 $\frac{9}{10}$ × 9 $\frac{89}{99}$ × 9 $\frac{881}{980}$ × &c.

96 × Q: 5 × 97 $\frac{1}{1}$ × &c:

Ubi fractionis cujusq; numerator æquat denominatorem suum dempto denominatore proxime præcedente; Denominator vero numeratorem æquat termini proxime præcedentis in impropriã fractionem reducti. Cognitâ vero serie quæ ad numerum aliquem non-quadratum attinet, habetur inde series quæ spectet istius non-quadrati multiplum per quemvis quadratum; scilicet dividendo seriem inventam per radicem quadrati multiplicantis. Primores autem duo termini cujusque seriei reperiendi sunt vi Canonis nostri generalis $\frac{4Q}{Dq}$. Nempe, quoties Dq est aliquota pars numeri 4Q, (sive D aliquota pars 2R,) habetur integer quadratus rem absolvens. Hoc est, (substituendo $\frac{a^2}{e^2} = Q$, adeoque $\frac{a}{e} = R$, et propterea $D = Q \backsim N = \frac{a^2}{e^2} \backsim N$) quoties $\frac{a^2}{e^2} \backsim n = D$ est aliquota pars numeri $\frac{2a}{e} = 2R$; vel (ductis utrisque in e^2) quoties $a^2 \backsim n e^2$ est aliquota pars numeri $2ae$. Eo itaque jam redacta est quæstio, ut reperiatur quadratus aliquis qui in datum non-quadratum ductus, ab alio aliquo quadrato differat

differat

differat aliquotâ parte dupli rectanguli sub radicibus. Quod inductione commode institutâ investigari poterit. Hæc sunt quæ de hoc negotio jam occurrunt,

Octob. 22. 1657. *Vir Clarissime,*

Amico tuo fidelissimo, atque observantissimo,

BROUNCKER.

EPISTOLA XV.

D. *Joh. Wallis ad D. Vicecom. Brouncker.*

EN Tibi tandem, Vir Illustrissime, quæ post reditum meum, cum hinc per aliquod tempus (uti nosti) abfuerim, visum est in summam redigere; ad D. Fermatii Animadversiones & Epistolas reponenda; quæ, si D. V. videbitur, ad Illustrissimum Digbæum, cui inscribuntur, possis transmittere. Ne autem mireris * hîc omissa quædam, aut vitio vertas, quæ non minoris momenti videantur, forsan etiam majoris, quam quæ hic habentur nonnulla; hoc ideo factum est, tum ne in volumen excresceret Epistola, tum quia non omnia simul prodere, necessum duxi.

*In Epist. sequ.

Reticere itaque visum est (ut à tuis incipiam) seriem illam radicum, quam exposuit mihi tua nupera epistola, *Oct.* 22. conscripta tum scilicet cum in procinctu eram hinc abiturus. Non quod eam ullatenus negligendam putaverim, sed acuminis plenam (uti tua solent semper esse) & sagaci tuo ingenio dignam. Sed quia quæ sine illâ hic habentur, rem illam videntur satis absolvere; (non enim quadratos omnes postulat problema, sed saltem infinitos;) atque hanc ipsam seriem, commodius forsan deinceps aliquando exhibendam judico. Ne tamen putet Fermatius existimâsse nos, quos hîc docemus quadratos infinitos exhibere, omnino omnes esse quæ exhiberi possent; huic cavendum esse duxi, plures adhuc, si plures postulet, pollicendo.

Placuit item reticere methodos, tum tuas tum & meas, quadratum primum, sive ipsius radicem, per inductionem exhibendi; tum quia,

quia, de Infinitis exhibendis, videbatur mihi problematis pars longe potior, tum præsertim quia videbam vix posse methodos illas, ita ut ab aliis commode intelligantur, perspicue tradi, sine longiori verborum & exemplorum apparatu quam ferre posse videbatur hæc epistola. Sin de hoc hæreat Fermatius, seorsim possumus deinceps exhibere *. Interim illud generatim dixisse sufficiat, hoc saltem spectandum esse, ut D = N ∾ Q sit aliquota pars numeri 2 R; sive na^2 ∾ e^2, numeri 2*ae*. Quippe tum, quadrati per Canones nostros exhibiti, futuri sunt integri.

* *Id factum est* Epist. XVII.

Centrum gravitatis quod spectat, quod scilicet à me exegit Fermatius; eorum quæ tibi antehac exposui de hoc negotio, multa deesse vides. Et quã prius universalius exposueram propositionem, jam arctius hic habes expositã, ut illud saltem exhibeat quod petebatur; nempe centrum gravitatis in Fermatii (ut loquitur) *Hyperbolis Infinitis*, eodem situ quo eas ipse exponit. Omissis, tum quæ centrum gravitatis in Parabolis & Paraboloidibus omne genus spectabant, (quod non petebatur;) tum quæ idem in Hyperbolis illis alio situ positis spectant, tum & in semiparabolis aut semiparaboloidibus ut & Semihyberbolis istiusmodi infinitis *. Quod fecimus, tum ne nimius essem in iis ex abundanti exponendis quæ præter postulatum erant, tum quia potius videbatur eadem Fermatio prius problematικῶς exhibere: ut quæ quæsitis suis nihilo mihi videntur inferiora.

* *Vide infra, post* Epist. XVI.

Cæterum totum hoc quicquid est, vestro etiamnum arbitrio permitto; ut si vel addendum vel immutandum quidquam putaveris, id præstet insuper,

Oxoniæ Novemb.

21. 1657. *Illustrissime Domine,*

Humillimus Tibi servus, ad obsequendum paratissimus,

J. WALLIS.

EPI-

EPISTOLA XVI.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby: praecedenti inclusa.*

Nobilissime Domine,

POst nuperas meas ad te literas, mense Septembri datas, adeptus sum ab Honoratissimo D. Brouncker, ipsius Problematum Fermatianorum solutiones. Quibus inspectis, abunde confirmatus sum in ea sententia, quam in præteritis ad Te literis indicabam. Quicquid enim sit de literis quas Fermatio fuisse perperam expositas insinuabas, (quas nec vidi unquam, nec scio quales fuerint;) Solutiones saltem eas esse comperio quæ quæsitis accuratissimè respondent. Eas itaque libuit statim Latino Idiomate ad Te transmittere, necui deinceps interpretatio prava fraudi sit. Atque id quidem fecerim repetitis ad Te literis eodem mense datis; sed quas, ob Fermatianas postea receptas, revocabam, ut ad ea quæ in his de novo suggeruntur simul respondeam.

Accepi utique sequente Octobris mense, a Dominatione vestrâ transmissas binas D. Fermatii ad Te literas, alteras Junii 6, alteras Augusti 15, datas. Nec ita multo post ipsius in meam Infinitorum Arithmeticam Animadversiones: Adeo Tu me novis perpetuo cumulas beneficiis. Cum verò nec ulla mihi spes supersit, quibus me devinctum tenes, beneficiorum vinculis me eximendi; nec aliud mihi restet quò me recipiam refugium præter Clementiam vestram; quam itaque oratam velim (id quod unicum habeo) humillimas ob tantum in me favorem gratias acceptare, atque eodem me, immerentem licèt, affectu prosequi, quo in me hactenus usus fueris: non te prolixâ detinendum censui præfatione, sed ad ea me protinus accingendum quæ dicenda postulant illæ literæ, ubi prius importunæ meæ loquacitatis, qua majoribus occupatum negotiis interpellem, veniam exoravero.

Conqueritur Fermatii Epistola prior, difficultatem assequendi quid velit Honoratissimus Vicecomes, in suâ problematum solutione, ob male traductas ex Idiomate Anglicano literas. Id autem ne ulterius conqueratur, Idiomate Latino, quod traductione non

indigeat, te compellandum jam censui, si tibi forte & hasce literas eidem communicandas visum fuerit.

Dum vero, quantum ille (ut ait) per obscuræ translationis nebulas assequi valet, existimat ab Honoratissimo Domino Problemati suo minime satisfactum esse: Ego planè contrarium censeo, nec, nisi forsan quod ipsius solutiones nondum satis intelligat, nihil quicquam esse cur id vel dubitet vel dissimulet.

Problema primum geminum erat.

Invenire cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum. Exempli gratiâ; Numerus 343 *est cubus à latere* 7; *omnes ipsius partes aliquotæ sunt* 1, 7, 49, *quæ adjunctæ* 343, *conficiant numerum* 400, *qui est quadratus à latere* 20. *Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.*

Quæritur etiam numerus quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum cubum.

Huic ego Problemati responderam, *Numerum* 1, *utrique quæsito satisfacere*; ut qui tum quadratus est, tum cubus, & partes aliquotas nullas habet.

Huic solutioni subjunxit D. Vicecomes Brouncker, Id ipsum præstare (si fractiones admittantur) tum *numerum* 1, *per cujusvis integri potestatem sextam divisum*; tum etiam, quod ad duorum quæsitorum prius, *numerum* 343, *sic divisum*: puta $\frac{343}{64}$. Siquidem numerus fractus, cum partes non alias habeat actuales, quam quæ toti sunt cognomines; non alias habebit partes aliquotas expositus cubus $\frac{343}{64}$, quam $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, quæ cum ipso $\frac{343}{64}$, conficiunt $\frac{400}{64}$ numerum quadratum lateris $\frac{20}{8}$.

Cum verò jam tandem se exponit Fermatius, non alium sibi quam numerum integrum satisfacere: Etiam sic sibi satisfactum esse non erit diffitendum. Quippe (præter numerum 343 in problemate expositum) non nisi *unum* postulat, nec nisi *unum* seipsum exhibiturum suscipit, [*Je demande un autre* &c; *& s'il respond qu'en entiers, il n'y à que le seul nombre* 343, *je vous promets de le desabuser en luy en exhibant un autre*;] hujusmodi autem unum nos exhibuimus integrum, nempe ipsum 1.

Cur plures non exhibeam, ratio est, non quòd existimem alium nullum esse, sed quia nec ipse plures postulat, nec ego rem ipsam

tanti

tanti esse judico (nam cui bono?) ut solicitâ videatur indagatione digna; nedum ut ad id negotii se tota tum *Anglia*, tum *Gallia Celtica* & *Belgica*, (quos simul omnes nominatim provocat,) se totos convertant. Non utique majoris momenti est (uti mihi saltem videtur) quam si ego pari ostentatione, exhibitis duobus numeris quadratis, (16 & 25,) qui omnibus sui partibus aliquotis additi eandem efficiant summam, ($16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 25 + 5 + 1$,) istiusmodi duos alios quadratos exhibendos, peterem. Cui solvendo accingat se, si velit, Fermatius; vel, si malit, negligat: non enim ego inquisitionem hanc tanti puto, ut vel illum exinde peritiorem esse judicavero si solverit, vel secus si minus.

Alterum Problema sic expositum est.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati, qui in datum numerum ducti, adscitâ unitate conficiant quadratum. Exemplum; datur 3 numerus non-quadratus, ille ductus in quadratum 1, adscita unitate conficit 4, qui est quadratus; item idem 3 ductus in quadratum 16, adscita unitate, facit 49, qui est quadratus; & loco 1 & 16, possunt alii infiniti quadrati idem præstantes inveniri. Sed Canonem generalem, dato quovis numero non-quadrato, inquirimus.

Hujusmodi Canonem hunc adhibuit D. Vicecomes Brouncker, demonstratione sua firmatum. Sit N, numerus datus quilibet, (quadratus, vel non-quadratus; integer vel fractus.)

Q, alius quilibet quadratus, (integer aut fractus,) cujus radix R.

$D = Q \sim N$; duorum Q, N, differentia. Puta Q-N, vel N-Q.

Canon. Est $\frac{4Q}{Dq}$ ($= \frac{2R}{D} \times \frac{2R}{D}$) numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate, conficiet $N \times \frac{4Q}{Dq}, + 1. =$

$= \frac{4QN + Dq}{Dq}$, numerum quadratum. Nam $\frac{4QN + Dq}{Dq} =$

$= \frac{4QN + Qq - 2QN + Nq}{Qq - 2QN + Nq} = \frac{Qq + 2QN + Nq}{Qq - 2QN + Nq} = \frac{Q+N}{Q-N} \times \frac{Q+N}{Q-N}$.

Alium item de meo libuit adjicere; qui quoad modum processus, sit paulò adhuc generalior; quoad rem ipsam, idem cum eo qui præcessit; demonstratione pariter firmatum.

Sit N, *Numerus datus quilibet.*
A, *Quilibet ad arbitrium assumptus.* Per quem
Q, *Quadratus quilibet dividatur;* sitque
M, *Divisionis istius quotiens.* A) Q (M.
P; *Numerus quilibet.*

D, *Differentia duorum* $\frac{M}{4P}A \sim PN$.

Canon. Est $\frac{MA}{Dq}$ numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate, conficiet $N \times \frac{MA}{Dq}, +1. = \frac{MAN+Dq}{Dq}$, numerum quadratum. Nam

$$\frac{MAN+Dq}{Dq} = \frac{MAN+\frac{Mq}{16Pq}Aq-\frac{1}{2}MAN+PqNq}{\frac{Mq}{16Pq}Aq-\frac{1}{2}MAN+PqNq} = \frac{\frac{Mq}{16Pq}Aq+\frac{1}{2}MAN+PqNq}{\frac{Mq}{16Pq}Aq-\frac{1}{2}MAN+PqNq} = \frac{\frac{M}{4P}A+PN}{\frac{M}{4P}A\sim PN} \times \frac{\frac{M}{4P}A+PN}{\frac{M}{4P}A\sim PN}.$$

Horum utrumlibet assumat Canonem Fermatius, manifestum est rem imperatam præstari. Sin plures adhuc desideret, spondemus ei quot volet: sed qui jam exhibitis coincident; ut qui suppeditant non modo quadratos infinitos, sed & possibiles omnes, rem imperatam præstantes.

Verum interim monendus est, limitationem illam, de numero dando *non-quadrato*, prout jam proponitur quæstio, supervacaneā esse; nam & de numeris quadratis non minus procedit Canon, quā de non-quadratis. Sed et eâdem facilitate res succederet si dixisset universaliter, *adscito numero quovis quadrato*, atque *adscita unitate*; id siquidem solum superesset insuper faciendum, nempe numerus quadratus per præcedentes canones inventus ducendus esset in adscis-

adſciſcendum illum quadratum. Puta, ſi quadratus ille adſciſcendus ſit Bq; in canone priore, pro $\frac{4Q}{Dq}$, ſumendum eſſet $\frac{4BqQ}{Dq}$; in poſteriori pro $\frac{MA}{Dq}$, ſumendum eſſet $\frac{MABq}{Dq}$. Nam & ſic eſſet, tum illic $\frac{4QNBq}{Dq} + Bq$, tum hic $\frac{MANBq}{Dq} + Bq$, numerus quadratus.

Atque hæc ea ſunt quæ in illa quam innuebam Epiſtola, indicaturus eram. Eam verò revocandam cenſui propter ea quæ jam tandem ſuggerit *Fermatius*; quæ faciunt ut dictis adjiciendum nonnihil videatur, ob novam quam adhibet limitationem, in quæſtione ut pridem propoſitâ minime memoratam. Nempe jam, Se ſolos quadratos *integros* voluiſſe dicit, non item fractos: in Fractionibus ſiquidem ſolutiones tam in procinctu eſſe ut à quolibet de trivio Arithmetico ſuppeditari poſſint.

Bene utique res eſt, quod jam tandem perſentiſcat Nobiliſſimus Vir, quæſtionem illam ſuam, (quam non ita pridem, ideo ſaltem ab Honoratiſſimo Vice-Comite non ſolutam judicaverit, quod non difficilis haberetur,) eam interim eſſe quam *quilibet de trivio Arithmeticus* facile ſolvat. Quanquam interim dubitare ſubit, num Fermatius ipſe, nedum quilibet de trivio Arithmeticus, ante expoſitos noſtros Canones, Canonem generalem ſciverit, qui non modo quadratos infinitos, ſed & poſſibiles omnes tum integros tum item fractos exhiberet; eumque talem eſſe noverit demonſtrare.

At verò hic, neſcio annon merito queri liceat, nobiſcum haud bene actum eſſe. Quippe de Integris, ne γρῦ quidem in expoſitâ quæſtione dictum eſt; neque erat unde illam ita intelligendam eſſe hariolemur. Cum enim in longa quam præmiſerat præfatione, Diophantum laudaverit, ejuſque quæſtiones Arithmeticas ſi non prætulerit, æquiparavit ſaltem aliorum Geometricis quæſitis, ſeque in expoſita quæſtione imitatum eſſe Diophantum profiteretur, apud quem per *numeros quadratos* nuſquam non intelliguntur promiſcue tum integri tum fracti; ecquis quæſo (qui Diophantum vel per tranſennam inſpexerit) ſuſpicari poſſet, vel

præter integros, quadratos esse nullos; vel, de solis integris, quæstionem sic propositam, intelligendam esse. Solvimus itaque quæstionem propositam prout verba sonant eoque sensu quo plane debuerunt intelligi: neque errore nostro factum est quod ille, si solos integros intenderat, non & sic loquutus sit.

Quoniam vero de Integris jam illam proponit quæstionem, quam de quadratis simpliciter, proposuerat prius; (hoc est, solutâ quæstione illâ, novam proponit) Etiam & hic illum sequi lubet. Aggrediemur itaque hoc —— Alterum Problema.

Idem in Numeris integris præstare.

Dicimus autem quæstionem sic limitatam minus universalem esse quam ut prius; Et saltem ad numeros datos non-quadratos (quod & Fermatius facit) restringendam esse, primâ statim fronte patet. Si enim tum N, tum $\frac{4Q}{Dq}$, sint numeri quadrati integri, erit & $\frac{4QN}{Dq}$ quadratus integer, cum itaque & $\frac{4QN}{Dq} + 1$ quadratus esse debeat, duo essent numeri quadrati integri qui nonnisi unitate ab invicem distarent; quod fieri neutiquam posse constat.

Quo autem casu res possibilis est; exhibent nostri Canones, non quidem *solos*, at saltem *omnes* quadratos integros, Exhibent utique possibiles omnes tũ integros tum fractos huic negotio accommodos, quod ne gratis dixisse videar, sic demõstro. Esto quadratus ille quicunque rem præstans, F q; erit itaque $NFq + 1 = Lq$: numerus quadratus. Sumpto jam $R = \frac{L \mp 1}{F}$, erit, inquam, $Fq = \frac{4Q}{Dq}$ quem supratraditus Canon exhibet. Erit enim $Q = Rq = \frac{Lq \mp 2L + 1}{Fq}$, Sed & $NFq + 1 = Lq$, adeoque $Lq - 1 = NFq$, & $\frac{Lq - 1}{Fq} = N$. Et propterea D ($= Q \backsim N$) $= \frac{Lq \mp 2L + 1}{Fq} \backsim \frac{Lq - 1}{Fq} = \frac{2L \mp 2}{Fq}$; adeoque (quia

2 R

$2R = \frac{2L \mp 2}{F}$) erit $\frac{2L \mp 2}{Fq}$) $\frac{2L \mp 2}{F}$ ($F = \frac{2R}{D}$: hoc eſt $Fq = \frac{4Q}{Dq}$. Exhibet igitur expoſitus Canon, quadratum Fq; hoc eſt, quadratum ex iis qui rem præſtent imperatam quemlibet. (Atque idem eodem fere modo, mutatis mutandis, ex altero etiam canone inferetur.)

Exhibet itaque Canon expoſitus infinitos numeros quadratos rem imperatam præſtantes; & quidem, quo caſu res eſt poſſibilis (nempe ſi expoſitus numerus ſit non-quadratus) infinitos quadratos integros. Id ſaltem ſupereſt, ut ſit $\frac{4Q}{Dq} = Fq$ numerus integer, atque ut iſtiuſmodi exhibeantur infiniti. Hoc autem ut fiat, ex infinitis quos Canon exhibet, ſeligatur ad arbitrium unus aliquis integer quadratus rem præſtans (vel etiam alio quocunque modo reperiatur;) hujus, inquam, unius ope exhibebimus alios infinitos hac methodo. Sit ille, verbi gratia, Fq; adeoque $NFq + 1 = Lq$; Erit $2FL$, radix alterius quadrati rem præſtantis: atque eodem modo, ex cognito ſecundo, invenietur radix quadrati tertii; & ſic quarti, quinti, &c. in infinitum. Exempli gratia. Quia numerus 3, in quadratum 1 ductus, adſcita unitate facit quadratum, puta $3 \times 1, + 1. = 4$. duplum rectangulum ſub 1 & 2 (radicibus quadratum 1 & 4) nempe $2 \times 1 \times 2 = 4$, eſt radix novi quadrati 16 rem præſtantis. Et quia $3 \times 16, + 1. = 49$. erit $2 \times 4 \times 7 = 56$ radix quadrati novi 3136 rem item præſtantis. Et quia $3 \times 3136, + 1. = 9409$, (cujus radix 97,) erit $2 \times 56 \times 97 = 10864$. novi adhuc quadrati radix rem item præſtantis. Et ſic ſemper. Exhibentur itaque infiniti quadrati integri rem præſtantes.

Non interim ignoro, præter hos, alios item poſſe quadratos idem præſtantes exhiberi, (exempli gratia, $3 \times 225, + 1. = 676 = 26 \times 26$. alioſque quos item exhibere poſſumus infinitos,) adeoque non omnes ſtatim ex uno aliquo ſic induci poſſe. Sed neque illud petebatur. Non enim propoſitum erat, ut *omnes* quadratos integros rem imperatam præſtantes exhiberemus; ſed, ut *infinitos*, quod factum eſt. Sin velit adhuc tertia vice, quæſtio-

nem suam mutatis iterum terminis proponere; & quadratos integros rem imperatam præstantes, non infinitos tantum, sed omnino omnes exhibendos petere: etiam & illud exhibere, si libet, possumus.

Rem autem sicuti dictum est, succedere, (ne gratis dixerim) sic demonstratur. Cum supra ostensum sit $\frac{4Q}{Dq}$ rem imperatam præstare; id solum restat curandum ut sit $\frac{4Q}{Dq} = Fq$ numerus integer; adeoque & ipsius radix $\frac{2R}{D} = F$; sive D) 2 R (F, numerus integer: hoc est, ut $D = N \sim Q$, sit numeri 2 R aliquota pars. Cum vero fieri possit ut 2 R, adeoque & 4 Q, non sit integer; substituatur, pro Q, $\frac{a^2}{e^2}$; adeoque pro R, $\frac{a}{e}$. Erit itaque Q ~ N) 2 R (F, hoc est $\frac{a^2}{e^2} \sim N$) $\frac{2a}{e}$ (F; adeoque & $a^2 \sim Ne^2$) $2ae$ (F. Quoties itaque $a^2 \sim Ne^2$ est aliquota pars numeri $2ae$, toties erit F numerus integer. Hoc est; quoties differentia quadrati unius, à quadrato altero in numerum expositum ducto, est aliquota pars dupli rectanguli sub duorum illorum quadratorum radicibus. Hoc autem (ut mille aliis modis contingere potest, ita) quod semper contingit, ubi differentia illa est vel 2, vel 1, manifestum est; quippe tum 1, numeri cujuscunque integri; tum 2, numeri $2ae$; erit aliquota pars. Id autem in casu nostro contingere manifestum est. Cum enim sit juxta quæstionis exigentiam, $NFq + 1 = Lq$, erit differentia $Lq \sim NFq = 1$; adeoque si per hanc differentiam dividatur 2 F L, quotiens erit 2 F L numerus integer; adeoque novus numerus F rem imperatam præstans. Atque sic semper. Quod erat ostendendum.

Plura de hoc negotio subjungere (quanquam ad manum multa sint) supervacaneum esse judico: metuo utique jam ne nimius fuerim.

Alia, quam proposuerat quæstio, non nisi sero ad meas manus pervenit: hæc autem erat.

Invenire

Invenire duos numeros cubos quorum summa æqualis sit duobus aliis numeris cubis.

Hanc ego paucis absolvam. Solvit eam, uti audio, D. Frenicle variis modis, cujus & aliquos numeros vidi; quos cum jam acceperit Fermatius non opus est ut repetam: Alios itaque de nostris adjiciam.

Cubus numeri 3. + *Cubus numeri* 36. = *Cub. num.* 27. + *Cub. num.* 30.

C.1. + C.8. = C.4$\frac{1}{2}$. + C.7$\frac{1}{2}$.
C.6. + C.10. = C.1$\frac{1}{3}$. + C.10$\frac{2}{3}$.
C.1. + C.17. = C.7$\frac{1}{2}$. + C.16$\frac{1}{2}$.
C.5. + C.11. = C.$\frac{2}{3}$. + C.11$\frac{1}{3}$.
C.4$\frac{1}{2}$. + C.17. = C.8. + C.16$\frac{1}{2}$.
C.$\frac{2}{3}$. + C.5$\frac{1}{3}$. = C.3. + C.5.
C.8. + C.64. = C.36. + C.60.
C.6. + C.48. = C.27. + C.45.
C.3. + C.11$\frac{1}{3}$. = C.11. + C.5$\frac{1}{3}$.
C.10. + C.80. = C.45. + C.75.
C.5. + C.40. = C.22$\frac{1}{2}$. + C.37$\frac{1}{2}$.
C.32. + C.66. = C.18. + C.68.
C.20. + C.54 = C.38. + C.48.
C.30. + C.66. = C.4. + C.68.
C.60. + C.132. = C.8. + C.136.
C.4. + C.48. = C.36. + C.40.
C.8. + C.6$\frac{1}{3}$. = C.3$\frac{1}{3}$. + C.9.
C.30. + C.81. = C.57. + C.72.
C.48. + C.99. = C.27. + C.102.
C.5. + C.60. = C.45. + C.50.
C.$\frac{1}{2}$. + C.6. = C.4$\frac{1}{2}$. + C.5.

Et nisi hi sufficiant numeri, exhibiturus adhuc sum quot ipse volet; idque tam facili negotio ut unius horæ spacio ausim vel centum spondere; sive integros sive fractos pro arbitrio. Quod adjicio ne iterum se numeros tantum integros voluisse dicat, dum tamen in quæstione exposita nulla sit integrorum mentio.

Solutis autem hisce quæstionibus, si saltem adhuc vires nostras se satis examinasse putaverit, oratum velim Nobilissimum Virum, ne indigne ferat, aut etiam quasi virium nostrarum his in rebus defectui imputet, si de hujusmodi in posterum quæstionibus solvendis non admodum simus soliciti. Quas quidem ut ut ipse deperit, me saltem illis (dicam enim quod res est) non adeo impense delectari profiteor, ut vel multum illis impendam temporis

poris aut laboris, vel tanti judicem, ut, aliis neglectis inquisitionibus Geometricis quæ magis placeant, ad numerosas hasce speculationes divertam. Quod tamen non ita dictum putet; quasi ego justis ipsius industriæ laudibus quicquam derogatum velim, si & has sectetur ipse speculationes (verum hortandum potius ut siquid reconditum his in rebus invenerit, quod summæ rei literariæ promovendæ conducat, id methodica tractatione palam aperiat:) Id saltem insinuatum velim, cum non omnibus mihi vacet æqualiter intento esse, iis quæ magis mihi animo fuerint, usuique futura videantur, me potius incubiturum, aliaque quæ aliis forsan magis placeant ipsis permissurum, ut & nos nostris suisque alii fruantur.

Atque hoc quidem responsi loco dictum sit quæstionibus quas jam proponit, viz. *Datum numerum Cubum in duos Cubos rationales dividere.* Et, *Datum numerum Cubum ex duobus Cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere.* Quas quidem si adhuc aggredi velit Honoratissimus Vicecomes Brouncker (qui & modo velit aggredi, non dubito quin feliciter sit assecuturus, saltem quatenus rei natura patitur,) vel etiam quivis alius, ego id minime aversor: mihi saltem neque vacat, neque animo est.

Quanquam enim non displicuerit semel iterumque, cum Nobilissimus Vir illud desideraverit, manus conferere, & in arenam suam descendere: ut tamen illud semper faciam, novasque perpetuo suppullulantes quæstiones, aggredeemur, (quasi huic soli vacemus) non expectabit, credo, Vir Doctissimus;

Quod & pariter dictum esto de propositionibus suis quas jam proponit negativis, puta, Quod *præter 25 nullus sit alius numerus quadratus integer, qui binario junctus efficiat cubum: Nec, præter 4 & 121, alius qui quaternario junctus efficiat Cubum.* Quæ num veræ sint necne, non sum admodum solicitus, cum non videam quid inde magni ponderis dependeat, adeoque nec studiosus inquiram. Cur autem eas quasi mirandæ audaciæ res ostentet, quæque attonitos reddant vel D. Freniclum, vel & Anglos: ego nullus video. Quippe frequentes admodum sunt, nobisque familiares, istiusmodi determinationes negativæ. Neque majus quid aut grandius insinuant, quam si dicerem, Cubicubum (potestatem sextam intelligo) nullum (in integris) esse, vel etiam Quadratum, qui numero 62 junctus efficiat quadratum: Nec, præter 4, ullum quadratum esse qui

qui numero 12 additus faciat biquadratum: Nec, præter 16, ullum biquadratum esse qui numero 9 additus faciat quadratum: Vel etiam, nullos (in integris) Cubos esse qui ab invicem distent numero vicenario; nec, præter 8 & 27, qui distent numero, 19: Nullos item Biquadratos (integros) esse, quorum ab invicem differentia sit 100, vel etiam (ut semel dicam) ullus alius par numerus qui non sit per 16 divisibilis. Cujusmodi innumeras determinationes negativas in promptu esset comminisci.

Ad meam quod attinet Arithmeticam Infinitorum, (quam proxime aggreditur,) Fatetur ille, easdem me invenisse propositiones, quas ipse; eaq; præstitisse (nisi quod de Centro Gravitatis nihil dixerim, de quo mox dicendum erit,) quæ ipsius prima quam viderim Epistola quasi Geometriæ miracula prædicabat, nec quicquam eorum esse quæ illic innuit quod non videre est in tractatu illo meo, prout citatis locis indicaveram.

Verum id illum, uti videtur, male habet, (quo ego me nomine nunquam culpandum fore autumaveram,) quod eâ methodo usus fuerim, non quæ solum evincat inventorum veritatem, per demonstrationes apagogicas, sive deductiones ad impossibile, quæ apud Archimedem frequentes sunt, (& quibus quidem uti conveniret si vellem ut Lector magis admiretur quam intelligat;) sed quæ simul investigandi ordinem ostendat.

Quod autem ad Archimedis exemplum provocet (quod quidem, si ea libuisset methodo demonstrandi procedere, me satis defendisset;) non ignotum credo fore doctissimo Viro, id quidem in Archimede à gravissimis viris doctissimisque maximè desiderari, & tantum non vitio verti, quod ipse quasi datâ operâ ita occultaverit sua inquisitionis vestigia; quasi invidisset posteris investigandi artem, à quibus tamen assensum inventis extorquere vellet. Sed nec Archimedes solus, verum & veterum plærique omnes, Analyticen suam, (quam habuisse, extra dubium est,) eousque celarunt posteros, ut Recentioribus facilius jam fuerit novam suo marte comminisci (quod præsenti præteritoque seculo factum est) quam indagâsse veterem.

Grates siquidem ego potius expectassem, quam ut eo nomine criminis insimularer, quod aperte & sine fuco non modo quo perveneram, sed & quibus passibus, indicaverim; nec (quod de aliis non

non pauci conqueruntur) pontem illum ipse demolitum iverim quo ego flumen transieram.

Quod autem innuit Vir Nobilissimus, propositionum mearum aliquot Archimedea methodo demonstrari posse; Ego illud nullus dubito: quippe illud facile fieri posse, non uno in loco, indicavi; (Arith. Infin. pag. 38. 83. & alibi;) sed &, cur illud ipse non fecerim; (ut de eligendæ methodi ratione non opus habeat jam tandem sciscitari, cum illam ego in operis decursu indicaverim.) Vix quemquam enim arbitror, non dicam, de trivio Arithmeticum, sed, paulo exercitatiorem Geometram (nedum tantum virum) qui non poterit, ex demonstrationibus nostris, Apagogicas & Archimedéis similes facili negotio efformare. Quod autem insuper se id facturum polliceatur; quamquam ipsius ego hac in re laborem non respuerim; cur tamen id oneris in se suscipiat, nulla cogit necessitas, cum id ipsum, ni fallor, quod se facturum innuit, à Cavallerio, in ipsius de Usu Indivisibilium in Potestatibus Cossicis tractatu, jam factum fuerit. Sin & suum velit calculum adjicere, non recuso.

Si denique Inductionem(argumenti genus tum Veteribus tum Recentioribus satis usitatum, & frequentius fortasse quam ipse prima vice putaverit) tanquam illegitimam argumentandi formam respuat; vel etiam (quæ nusquam non nunc dierum obtinent) notarum Algebricarum usum; ego sane de Apologia hac ex parte texenda neutiquam sum solicitus. Utebar ego jure meo, dū qua libuit incedebam via, & utatur ipse suo liceat, si malit alias incedere, nec dubito quin, quæ culpat ipse, erunt qui laudabunt.

Quod me autem maxime spectare videatur unum adhuc restat, quod est de Centro gravitatis; ut nempe fidem liberem, diluamqꝫ quod, si non impingit, suspicari saltē videtur Vir Acutiss. falsi crimē.

Dixeram utique (in literis meis Junii 6. datis) quod, quamvis, ex iisdem quibus (in Arith. Infin.) utor principiis, de Gravitatis Centro tum in Parabolis omnigenis, tum in aliis figuris quamplurimis sive planis sive solidis facile esset statuere; totam tamen illam de Gravitatis Centro speculationem consulto omiserim, ne in digressionibus nimius essem. Ad hæc reponit Vir Nobilissimus; haud illud sibi persuasum iri; adeoque optasse se (quasi ego illud speciatim dixerim) me centra gravitatis in Hyperbolis infinitis determinasse; easque quæ habent disterminasse ab

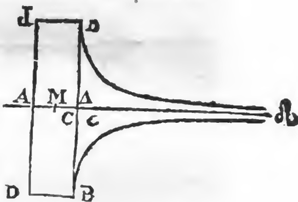
iis

iis quæ non habent: saltem ut generalem propositionem, nisi citra demonstrationem, transmittam petit. Quod ni fecerim, innuit, existimaturum se rem eam mihi minimè cognitam esse (quod tamen esse, me putat insinuasse;) nec prius se missurum suas quas pridem pollicitus erat speculationes, quam hoc præstitero.

Faciam itaque quod petit Vir Nobilissimus; tum ne malæ fidei meritò videar insimulari, tum ut videat, miranda quæ putaverit, sibique forsan soli peculiaria, etiam nostræ potestatis esse. Sed &, ultra quam petit, adjungam etiam tum investigandi methodum tum demonstrationem more meo; ut videat quam directa methodo ex ea quam trado indagandi arte emergant.

Hyperbolas suas Infinitas, non alias esse à Figuris juxta series quas *Reciprocas* appello conflatis, (& quarum quadraturam ostenderam prop. 102, 103, 104, 105. Arith. Infin.) jam antehac ostendi, & fatetur ipse.

Esto itaq; ad rectam A Δ ♪ infinitam, istiusmodi figura utrinq; posita, atque ita quidem aptata ut hæc illi congruat, puta A♪B D ipsi A♪b d. Figura ex utrisq; conflata est ea quam appellat Fermatius *Hyperbolam infinitam*, & cujus centrum Gravitatis postulat.



Cum igitur rectæ, ipsi A ♪ parallelæ (tum infra tum supra) sit series reciproca, adeoq; indicem habeat negativum, puta $-p$: Cumq, item dimidia sint integris proportionalia, adeoq; ipsarum puncta media, (hoc est, rectarum centra gravitatis,) intelligenda sint ex libra A ♪ suspendi in distantiis à puncto A (quod libræ centrum jam supponitur) quæ sint ipsis magnitudinibus proportionales: Singularum momenta, quorum ratio ex rationibus tum magnitudinum tum distantiarum componitur, series erit indicem habens $-2p$. Erit itaque tum figura tota, ad inscriptum parallelogrammum Db; ut 1, ad $-p+1$: tum omnia illius momenta, ad omnia hujus, (in hoc situ;) ut 1, ad $-2p+1$. Centrum autem gravitatis parallelogrammi, est ipsius punctum medium, (uti notum est;) adeoque parallelogrammum D b, suspendi intelligendum est ex puncto M, medio inter A Δ; cujus itaque distantia ab A, est $AM = \frac{1}{2} A\Delta$. Cum itaque totius figuræ

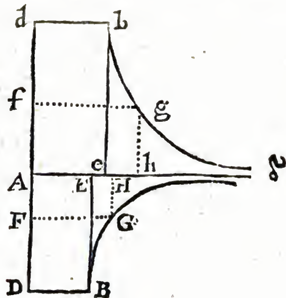
guræ pondus in suo situ, sit ad pondus parallelogrammi in suo, ut 1, ad $1 - 2p$: si sumatur, in altero libræ brachio, recta AP quæ sit ad AM, ut 1 ad $1 - 2p$, parallelogrammum illud ex puncto P suspensum æquiponderabit toti figuræ suspensæ ut prius. Cum itaque magnitudo figuræ totius ad magnitudinem parallelogrammi, sit ut 1 ad $1 - p$: Si fiat, ut 1 ad $1 - p$, sic AP (ex una parte) ad AC (ex altera parte;) erit (propter distantias magnitudinibus reciproce proportionales) C centrum gravitatis expositæ figuræ infinitæ, si quod sit.

Porro, quoniam in operationis processu sumendum erat, ut 1 ad $1 - 2p$, sic AP ad AM; manifestum est, ut habeatur punctum P, quantitatem $2p$ minorem esse debere quam 1, (adeoque p minorem quam $\frac{1}{2}$,) secus enim $1 - 2p$, vel nihil erit vel minus quam nihil, & propterea punctum P nusquam erit, adeoque nec punctum C.

Invenimus itaque, in Fermatii hyperbolis infinitis, quotquot habent, centrum gravitatis; easque quæ habent ab iis quæ non habent disterminavimus. Quod erat imperatum.

Plura additurus eram de gravitatis centro, tum in his, tum in aliis item figuris, variis modis constitutis: nisi quod tum hoc unum peteret Fermatius, tum recordandum sit me jam epistolam non volumen scribere.

Cum vero hactenus illi obsecutus sim; ab illo vicissim rogo, ut id ipsum ille in suis hyperbolis hisce præstet, ubi duæ utrinque curvæ non sint ejusdem generis hyperbolæ; atque id universaliter. Exempli gratia. Si (ad mentem Fermatii) in figura infinita



A δ B D, inſcribantur parallelogramma A G quolibet; & in figura A δ *b d*, quotlibet parallelogramma A *g*; ſitque, illic, factum ex Cubo F G in rectam G H æquale facto ex cubo B D in rectam B E; hic vero, factum ex ſurdeſolido *f g* in quadratum *g h* æquale facto ex ſurdeſolido *d b* in quadratum *b e*. Quæritur totius figuræ centrum gravitatis ſi quod habeat; & determinare univerſaliter quales ex his habeant & quales non. Sin fateatur illud ſe præſtare non poſſe, ego me id facturum ſpondeo. *Vid. Append. hujus Epiſt.*

Tandem, poſt reliqua, allatæ mihi ſunt ſeorſum ejuſdem Fermatii in Arithmeticam meam Infinitorum, Animadverſiones quatuor. Sed quæ tuto poſſem præterire, niſi forſan ſe ſic neglectum putaret Vir Illuſtris. Facile mihi perſuadeo, quæ illic habentur præpropere ſcripta eſſe & feſtinanter, (& quæ forſan ipſe, ſi libri reliquum adhuc legerit, indicta mallet:) adeo parum ſapiunt tanti Viri acumen, ſuntque ἀπροσδιόνυσα omnia.

1. Ubi, in Epiſtola quæ Arithmeticæ Infinitorum præfigitur, hiſtoriam inquiſitionis meæ expono, & ſpeciatim quomodo *Cavallerii* Methodum Indiviſibilium ad præſens negotium applicaveram; Nempe ſicut, Ratio circulorum omnium ex quibus (ad mentem Cavallerii) componitur Conoides Parabolicum, ad totidem in Cylindro, eſt ratio ipſius Conoidis ad Cylindrum, & ratio quam habent omnes eorundem diametri ad omnes horum, eſt ratio Parabolæ ad Parallelogrammum; (quarum utraque nota eſt:) item, ratio omnium circulorum in cono ad omnes in Cylindro, eſt ratio coni ad cylindrum, & ratio quam habent eorum omnium diametri ad diametros horum eſt ratio Trianguli ad Parallelogrammum; (quarum item utraque nota eſt:) Ita, ratio Circulorum omnium in ſphæra ad omnes in cylindro eſt ratio ſphæræ ad cylindrum, & ratio quam habent eorum omnium diametri, ad diametros horum eſt ratio circuli ad Parallelogrammum; (Quod nec ipſe diffitetur Fermatius:) harum vero cum prior jamdudum cognita fuerit poſterior incognita, id mihi me propoſuiſſe dixi inquirendum, num quâ poſſem arte, ex eâ cognita, hanc, incognitam hactenus, inveſtigare. Regerit Fermatius, At cognoſci hoc non poteſt, niſi cognitâ circuli quadraturâ. Rectiſſime quidem; nam hoc ipſum eſt, circulum quadrare. Et, ubi hoc mihi propoſui inquirendum, proponebam inquirendam

dam circuli quadraturam. Quod & ῥητῶς ibidem dictum est.

2. Cum dixerim, quæsiisse me, in serie numerorum 1, 6, 30, 140, 630, &c, (cujus seriei creationem indicaveram) quis medius esset interponendus terminus inter 1, & 6. Respondet ille, medium Geometrice proportionalem rem non præstare, ut qui reliquos progressionis terminos non respiciat. Et recte quidem: quippe series exposita non est series Geometricè proportionalium, adeoque terminus medius quæsitus non debet esse medius Geometrice proportionalis. Dum autem hinc infert, medium nullum convenire, quia medius Geometricè proportionalis non convenit; nulla est vel umbra consequentiæ: nec magis sequitur quam si idem dixisset de serie 1, 6, 11, 16, &c. ubi nemo nescit, inter 1 & 6, interponendum esse medium $3\frac{1}{2}$; non quidem ut medium Geometrice proportionalem, sed ut medium seriei congruum, nempe (propter seriei naturam) medium Arithmetice proportionalem. Similiter, in serie numerorum 1, 6, 15, &c. (qui sunt numeri triangulares) siquis inter 1 & 6, eo quod nec medius arithmeticus (puta $3\frac{1}{2}$) nec etiam Geometricus ($\surd 6$) conveniret, medium igitur seriei congruum nullum esse affirmaverit: næ illum hallucinari certum est, quippe terminus intermedius seriei congruus est 3, numerus item triangularis, sicut & inter 6, & 15, interponendus est 10. Et quidem si etiam adhuc quæratur in serie 1, 3, 6, 10, 15, &c. quis conveniret terminus intermedius inter 1 & 3, terminum illum esse $1\frac{7}{8}$ à ostendimus prop. 175. Sed & de hujusmodi serierum interpolatione, cum per totum librum illum frequentissimus sit sermo, (ut quod maximum est totius istius libri negotium,) præsertim à Schol. prop. 165. ad finem usque libri; impossibile esset, si librum perlegerit & vel mediocriter pensitaverit ut de medio Geometrice proportionali me loquutum esse existimasset. Et quidem eandem ipsam seriem 1, 6, 30, 140, &c. inter alias interpolandam suscepimus, atque inter 1 & 6 interponendum esse medium 2 □, ostendimus ad prop. 167. quid autem innuit terminus ille, fuse declaratum est ad prop. 191.

3. Cum investigationem primi Lemmatis (prop. 1.) ita institueram ut conformis sit secuturis aliis similibus lemmatum intricatiorum indagationibus prop. 19. 39. 43. &c. instituendis, eisque facem præferret. Ille longa disquisitione ostendit propositionem

tionem illam se aliter posse demonstrare. Quod quidem ego nullus unquam dubitarem. Ecquis enim est vel de trivio Arithmeticus, nedum Vir tantus; qui nesciat summam progressionis arithmeticæ colligere? aut etiam, colligendi methodum demonstrare? Et quidem si me illud nescijsse putaverit (quod haud existimo) videat licet *Prop.* 2. *Con. Sect.* & *Prop.* 45. *cap.* 27. nostræ *Matheseos Universalis*. Sed & interim monendus est acutissimus Vir, eo loci me non de propositione demonstranda quam affirmaveram, verba facere; sed de re quæsita investiganda, si jam esset ignota; ut exemplo hujus investigationis in re facili, huic similes deinceps in re difficiliori facilitarem. Adeoque, si appositè loqui voluisset, ostendisset hanc non legitimam esse in rem ignotam inquirendi methodum: Quod tamen non facit. Fatetur, enim utilem eam esse in rebus occultis inquirendis, modo caute adhibitam. Cum itaq; circuli quadraturam, quam inter cætera venabar, rem satis occultam esse non negaturum credam; neque etiam me tam incaute uspiam eam adhibuisse methodum ut inde lapsus fuerim, insinuet; non video quo nomine hanc meam inquirendi methodũ merito culpandam censeat. Si autem vellet, ut rem legitime inventam, demonstrationibus adhuc apagogicis a posteriori confirmarem: cur id non fecerim abunde dictum est, tum ad *prop.* 2. *Con. Sect.* tum ad *prop.* 43 *Arith. Infin.* tum alibi. Quippe illud opus esse non ducebam, uti necdum opus esse existimo.

4. Denique, cum ad *prop.* 2. innuit limitationem indebite annexam esse; Omnino errat Vir Clarissimus a mente mea nec mea verba satis advertit. Quippe ego propositionem illam universaliter affirmabam, & universaliter etiam (quantum opus erat) me demonstrasse existimo; (emergit utiq; ex inquisitione præcedente:) Nempe universaliter verum est & universaliter affirmatum, seriem arithmetice proportionalium ab o inchoatam, (quippe quæ semper erit ut, 0, 1, 2, 3 &c.) quicunq; fuerit terminus secundus, ad seriem totidem maximo æqualium esse ut 1 ad 2. Quod sine ulla limitatione verum est. Sed & addideram, explicationis causæ, vel, si libet, instar corollarij; Si terminorum numerus ponatur a, & terminus ultimus l, (quicunq; fuerit secundus) erit omnium summa $\frac{1}{2}$ al, hoc est semissis numeri terminorum ($\frac{1}{2}$ a) in (l) terminum ultimum ductus. Atque hoc etiam sine ulla limitatione affirmatum est. Sed & addebam porro,

Si item terminus secundus sit, 1 (non autem secus,) terminorum numerus erit $l+1$, hoc est, unitate major quam est terminus ultimus; adeoq; $\frac{l+1}{2}l$, erit omnium summa, quippe hoc casu $\frac{l+1}{2}$ tantundem erit atq $\frac{1}{2}a$ semissis numeri terminorum, qui itaq; in l terminum ultimum ductus exhibebit omnium summam. Atq; hic quidem (quod solum ego limitate enunciaveram) limitatione opus esse haud pernegabit Vir doctissimus. Quanquam enim verum sit, progressionis (verbi gratia) 0, 1, 2, 3, 4; (cujus secundus terminus est 1) numerum terminorum esse $l+1$, hoc est $4+1$, sive 5, in alia tamen cujus terminus secundus non sit 1, puta 0, 2, 4, 6, 8, numerus terminorum non est $l+1$, hoc est $8+1$, sed $\frac{8}{2}+1$, hoc est 5. Neq; alium omnino sensum ferre possunt mea verba, nec nisi collo admodum obtorto alio detorqueri. Siquidem postquam universaliter affirmaveram, *Seriei Arithmetice-proportionalium continue crescentem ab o inchoatam, esse ad seriem totidem maximo æqualium, ut 1 ad 2:* Subjunxi protinus ipsissima hæc verba, *Nempe, si primus terminus sit o, secundus* 1 *(nam, si secus, moderatio adhibenda erit) & ultimus l, erit summa* $\frac{l+1}{2}l$ *(erit enim, eo casu, numerus terminorum* $l+1$;) *Vel (posito numero terminorum a, quantuscumq; sit terminus secundus)* $\frac{1}{2}al$. Quæ adeo perspicue dicta sunt, ut mirum sit quenquam, modo satis advertet, perperam intellexisse posse. Festinationi itaq; dandum est, quod Vir Illustris, alioqui satis acutus, & rerum sagax, non satis assecutus est mentem meam.

Atque hæc sunt quæ ad animadversiones hasce dicenda putaverim; ne saltem eas contemptui habuisse videar: Si enim exinde otij quid nactus sit Fermatius eadem secundò inspiciendi, & paulo accuratius pensitandi, non dubito quin jam ipse sibi pridem satisfecerit.

Quoniam vero lubitum fuerit Nobilissimo Viro in arenam provocare (quod in literis suis videre est) non unum aut alterum de grege Mathematicum, sed totam tum Angliam, tum Belgiam, Galliamq; excepta Narbonensi reliquam; Non ægre feret, credo, si & paria rependamus; neq; id in re leviculâ, sed quam nemo non agnoscet tum dignum vindice nodum, tum si solverit operæ pretium. Non illam quæstionem intelligo quam

ad

ad ipsius primam reponebam, tanquam istius similem: Hanc enim non eam esse existimo, ut anxiâ disquisitione digna videatur; Neq; etiam illam de Coni Frusto; quam (uti tunc indicavimus) non ut propositionem difficilem, sed ut elegantem proponebam: Sed neq; eam modo memoratam in ipsius epistola, Nempe, exposita serie numerorum 1, 6, 30, 140, 630, &c. terminum inter 1 & 6 intermedium seriei congruum invenire; Quamvis enim fuerit hoc problema satis arduum quum primum proponeretur, quodq; Vir Nobilissimus etiam adhuc existimat insolubile; cum tamen id in libris editis a nobis jam solutum sit, non est ut idem denuo exponamus solvendum. Sed alteram volo huic consimilem; nempe exposita serie numerorum 1, $\frac{5}{6}$, $\frac{31}{30}$, $\frac{209}{140}$, $\frac{1471}{630}$, $\frac{10625}{2772}$, &c. terminum inter 1 & $\frac{5}{6}$ intermedium, seriei congruum, invenire. At nolim interim existimet me medium quærere Geometrice proportionalem, (quod videtur pridem censuisse) vel etiam Arithmetice proportionalem; (quasi putem $\frac{11}{12}$ aut $\sqrt{\frac{5}{6}}$, tanta solicitudine quærendum,) sed medium qui sit naturæ seriei congruus, totamq; seriem respiciat. Sed neq; sufficiet dixisse medium Geometrice proportionalem, vel etiam Arithmetice proportionalem, seriei congruum non esse: non enim quæritur quis non sit congruus, sed quis sit.

Ne vero ludicrum quid sibi sentiat propositum, aut rem nihili: Si quæsitum ille legitime solverit, spondemus ei vicissim (βραβεῖον satis amplum) Hyperbolæ quadraturam: Sin illud haud præstiterit Narbonensis Gallia, præstitum illud aliquando exhibebit (favente Deo) Anglia.

Verum jamdiu est quod D. V. fuerim molestus, tantaque tua clementia audacior factus in Urbanitatis leges peccaverim; idq; eousque, ut ne veniam quidem admissi possim, sine nova culpa, exorare. Id saltem spei superest, ut, pro insigni vestra humanitate, quicquid est admissi criminis tam benigna sis interpretatione adjuturus, ut meliori apud te quam teipso vel mei vel gentis nostræ advocato dicam, an patrono, haud facile sim usurus. Qua spe fretus, etiamnum audeo, favore tuo nixus, me profiteri

Insignissime Domine,

Obsequentissimum Tibi, Tuiq; observantissimum

Oxoniæ *Nov.* 21. 1657.

J. WALLIS.

Quæ de centro gravitatis superius innuimus tanquam in Epistola proxime precedente omissa, vel immutata, placuit hic subjungere; ut res ea tota Lectori plenius exhibeatur.

CUm exigit à me Fermatius, ut in *Hyperbolis* suis *Infinitis*, quotquot habent, centrum gravitatis exhibeam; easq; quæ habent, ab iis quæ non habent disterminem; saltem ut generalem propositionem, utut citra demonstrationem, transmittam: Faciam quod petit Vir Nobilissimus; &c. Et quidem, ultra quam postulat, Demonstrationem adjungam, ut videat quam directâ methodo, ex ea quam trado indagandi arte, emergat.

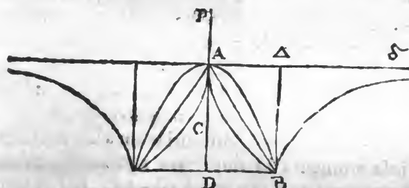
Propositio hæc est:

SI ad axem AD, cujus vertex A, adjaceat (utrinque) figura sive plana sive solida, cujus ordinatim inscriptæ, sive rectæ, sive superficies planæ similes, sint juxta seriem sive æqualium, sive primanorum, secundanorum, tertianorum *&c.* sive subsecundanorum, subtertianorum *&c.* sive aliam quamlibet ex his utcunque compositam, sive denique harum cuilibet reciprocam, (inter quas ipsius sunt quas innuit *hyperbolæ infinitæ*,) constitutæ: si Axis AD ita in puncto C dividatur, ut sit, sicut 1 ad seriei istius indicem unitate auctum, ita CD ad CA: Erit C Centrum gravitatis istius figuræ. Quæque ita constitutæ sunt ut Axis AD ità dividi possit, centrum gravitatis habent; quæ secus, non habent. Sic autem constitutæ sunt, si seriei index major sit quam -1: sin secus, non sunt.

Sequitur Demonstratio.

POnamus utique primò Verticis punctum A, in centro libræ; sitque Axis AD juxta libræ longitudinem applicatus. Sitque seriei juxta quam procedunt ordinatim applicatæ (sive rectæ sive planæ) Index p; quæ propterea ad A correspondentem seriem æqualium erit, ut 1, ad $p+1$. Ipsarum autem distantias à vertice, adeoque à Centro libræ, diametris interceptis proportionales esse (seu potius easdem) per se patet, adeoque seriem esse primanorum cujus index 1. Cum itaque momentorum ad invicem ratio componatur ex rationibus tum magnitudinum, tum à centro libræ

bræ distantiarum; Momentorum series (quippe ex duabus illis composita) indicem habebit $p+1$, (ex componentium serierum indicibus aggregatum.) Erit itaque momentorum omnium aggregatum (hoc est, pondus totius figuræ sic appensæ) ad totidem ultimo æqualia (hoc est, ad figuram correspondentem ex æqualibus conflatam, ex puncto D appensam) ut 1 ad $p+2$. Si itaque in altero libræ brachio sumatur AP, quæ sit ad AD, ut 1, ad $p+2$; atque ex puncto P suspendatur correspondens ea figura ex æqualibus conflata; æquiponderabit ea expositæ figuræ primitus appensæ; eritque, duorum simul sic appensorum ponderum, centrum gravitatis punctum A. Adeoque sublato altero ex puncto P appenso, sumptoque ut 1 ad $p+1$ sic AP ad AC, (hoc est, ut magnitudo ad magnitudinem sic reciproce distantia ad distantiam,)



erit C centrum gravitatis ponderis reliqui. Est autem $AP = \frac{1}{p+2} AD$. ergo $AC = \frac{p+1}{1} AP = \frac{p+1}{p+2} AD$; adeoque $CD = \frac{1}{p+2} AD$; & propterea. $AC. CD :: p+1. 1.$ quod erat demonstrandum. Si autem p sit vel -1, vel minus quam -1, (puta -2, -3, &c.) Erit $p+1$ (puta $-1+1$, $-2+1$, $-3+1$, &c.) vel 0, vel minus quam 0, adeoque ad 1 nullam habebit rationem. Unde patet determinatio.

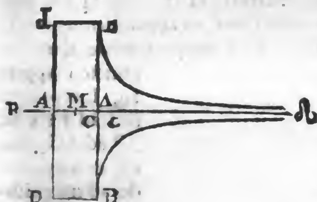
Dicet fortassis; Hoc pacto inveniri quidem centrum Gravitatis in iisdem figuris (inter alias) quas ille *Hyperbolas Infinitas* vocat, sed non in eodem situ. Non enim ponit ille suas utrinq; a diametro terminata AD in infinitum continuatas; sed a utrinque ad infinitam diametrum A δ: & centrum gravitatis hoc situ quærit.

Fatemur quidem hoc verum esse. Sed regerimus, nec minus curiosam hanc esse speculationem, quam illam alteram; &, ni fallor, novam: nescio enim an vel ipse Fermatius vel quispiam alius id antehac susceperit, nedum assecutus sit. Ne autem quæ-

ratur

ratur, hoc sibi utcunque non satisfacere, eo quod ille centrum gravitatis in alio situ postulet; non gravabimur etiam ex ea parte sibi satisfacere.

Cum rectæ A Δ δ parallelæ (tum infra, tum supra,) sint series reciproca seriei directæ cujus index sit, verbi gratia, p; adeoque seriei reciprocæ index $-p$; Cumque item dimidia sint integris proportionalia; erunt ipsarum semisses ejusmodi item series eundem habens indicem $-p$: adeoque ipsarum puncta media, hoc est rectarum centra gravitatis, intelligenda sunt ex libra Aδ suspendi in distantiis à Centro libræ A, quæ sint ipsis magnitudinibus proportionales. Et propterea, cum singularum momenta sint in ratione ex rationibus tum magnitudinum tum distantiarum à libræ centro



composita erunt ipsa momenta in duplicata ratione magnitudinum; adeoq; series reciprocra cujus index est $-2p$. Erit itaque tum figura tota, ad inscriptum parallelogrammum; ut 1, ad $-p+1$: tum omnia illius momenta, ad omnia hujus (in hoc situ) ut 1, ad $-2p+1$. Est autem (ut notum est) parallelogrammi centrum gravitatis, ipsius punctum medium; adeoque inscriptum parallelogrammum suspendi intelligendum erit ex puncto inter A & Δ medio; puta M: ejusque à centro libræ distantia est $AM = \frac{1}{2} A\Delta$. Cum itaque totius figuræ pondus in suo situ, sit ad pondus inscripti parallelogrammi in suo, ut 1 ad $-2p+1$, si sumatur, in altero libræ brachio ultra centrum A, recta A P, quæ sit ad A M, ut 1 ad $-2p+1$; parallogrammum ex puncto P suspensum æquiponderabit expositæ figuræ suspensæ ut prius. Est autem magnitudo figuræ expositæ, ad Parallegrammi magnitudinem, ut 1 ad $-p+1$. Si itaque sumatur ut 1, ad $-p+1$, sic A P ex una parte, ad AC ex altera parte; (nempe distantiæ magnitudinibus reciprocè proportionales;) erit C expositæ figuræ centrum gravitatis. Est autem $AP = \frac{1}{-2p+1} AM$; adeoque $AC = \frac{-p+1}{1} AP$

=

$= \frac{-p+1}{-2p+1} \times$ AM. Hoc est, ut $1-2p$ ad $\overline{1}-p$, sic AM, ad AC. Oportet autem 1 plus esse quam $2p$ (adeoq; p minus esse quam $\frac{1}{2}$) secus enim $1-2p$ nihil erit, vel etiam minus quam 0. Dico itaq;

Si ad Axem Aδ infinitum, cujus vertex A, utrinque adjaceat figura plana, cujus ad axem conjugatum DAd (utrinque terminatum & æqualiter a puncto A medio porrectum) ordinatim applicatæ sint juxta seriem aliquam Reciprocam (adeoq; indicem habentem negativum) constitutæ, (quales sunt quas appellat Fermatius *Hyperbolas Infinitas*:) Atque sumatur, ut reciprocæ istius seriei index duplicatus unitate auctus, ad eundem indicem unitate item auctum, sic AM (distantia verticis, mediiq; puncti parallelogrammi inscripti,) ad AC (versus easdem partes in axe Aδ jacentem;) erit C expositæ figuræ (si quod sit) centrum gravitatis. Habebit autem ea Centrum gravitatis; si seriei index major sit quam $-\frac{1}{2}$; sin secus, non habebit.

Notandum autem est, eodem plane modo omnia succedere, etiamsi duæ semihyperbolæ DAδ, dAδ, non utrinq; ponerentur ad rectam Aδ, (ut nempe prodeat figura hyperbolica infinita acuta, ut hic,) sed utrinque ad rectam DB; (coincidentibus rectis DB, db,) ut figura prodeat excavata. Eodem, enim modo quo hic quæritur punctum C in recta Aδ, quærendum tum esset in recta DB, saltem producta.

Sed & eadem omnia eodem modo succederent in figura ex duabus semiparabolis, sive semiparaboloidibus, similibus, & similiter positis; sive ad Aδ tangentem in communi vertice, sive ad DB basim communem. Nempe erit ut $2p+1$, ad $p+1$; sic AM, ad AC; (vel DM, ad DC.)

Satis itaq; superque factum est Fermatij postulatis.

Facile autem esset ex ijsdem principiis, non in Parabolis tantum aut Paraboloidibus, integris, sed & in semiparabolis, aut semiparaboloidibus centrum gravitatis determinare; imo & in semisse istiusmodi figurarum quas *Hyperbolas Infinitas* appellat Fermatius; (quod an ipse unquam cogitaverit nescio;) puta quæ rectis AD, DB, terminatis, Aδ infinitâ, & unâ curva continentur. Invento quippe puncto C, tum in recta AD, tum in recta Aδ; ubi rectę hinc ductæ, rectis AD, Aδ parallelæ, se

mutuo

mutuo secant, habetur centrum gravitatis istius figuræ. Unde etiam facile colligetur si, opus est, centrum Gravitatis in figura ex hujusmodi semiparabolis, sive semihyperbolis infinitis dissimilibus conflata.

Quæque modo de ejusmodi Hyperbolis planis ostensa sunt, possunt eadem arte ad figuras solidas (mutatis mutandis) accommodari, quæ constant applicatis ex planis similibus parallelis ad rectas sive AD, sive A♪, parallelas, Sed recordandum est, me nunc Epistolam, non tractatum integrum conscribere.

EPISTOLA XVII.

D. Joh. Wallis *ad* D. *Vicecomitem* Brounker.

Illustrissime Domine,

QUoniam tu illud postulas (neque par est ut imperijs istiusmodi tuis non obtemperem) compingam quam possim breviter methodum quam in venandis numeris, ad Problema Fermatianum solvendum requisitis uterq; hactenus adhibuimus: una cum ejusdem fundamento; varijsque (ubi opus erit) operationum compendiis, siquando res alioqui in longum sit abitura:

Postulat problema, *ut dato quovis numero non-quadrato*, (*puta* n^a,) *reperiatur numerus quadratus* (*puta* a^2) *qui in datum numerum ductus, adscita unitate, faciat quadratum*, (*puta* $na^2 + 1, = l^2$.) Sed &, ut *istiusmodi quadrati* a^2, *exhibeantur infiniti*, quicunque proponatur non-quadratus *n*.

Postquam autem hoc olim problema, (quia de numeris Integris nulla facta fuit mentio,) ita solveramus ut omnes possibiles tum integros tum fractos exhiberemus: Se tandem exponit D. Fermatius se *solos integros* velle; adeoq; petere ut infiniti *quadrati integri* rem præstantes exhibeantur. Adeoque problema primitus propositum, in alium plane statum immutat alius plane naturæ. Utut sit, sequendum duxi; & rem in numeris integris aggrediendum. Quod & factum est.

Exordium sumendum existimabam ab universali Canone pridem exhibito. Nempe si numerus datus quilibet (quadratus vel non quadratus, integer vel fractus) dicatur N, & quadratus quilibet

quilibet Q, cujus ab N differentia dicatur D; erit $\frac{4Q}{Dq}$ quadratus requisitus. Quem quidem Canonem, jam antehac demonstravimus non modo verum esse, adeoq; infinitos exhibere, sed & omnino omnes possibiles quadratos tum integros, tum fractos rem imperatam præstantes.

Hoc posito; illud solummodo (ob novam interpositam determinationem) ultra requiritur, ut $\frac{4Q}{Dq}$, adeoq; & ipsius radix $\frac{2R}{D}$, sit numerus integer. Hoc est, ut D sit aliquota pars numeri 2R. Quoties enim hoc contingit; manifestum est, quadratum, vi istius Canonis exhibitum, esse numerum integrum. Et uno istiusmodi integro habito, alii protinus infiniti, ne dicam omnes, certa methodo reperientur. Ut deinceps dicetur. Quoniam vero, quod non dissimulandum est, fieri potest ut 2R sit numerus fractus, etiam ubi $\frac{2R}{D}$ est integer; ponamus $R = \frac{s}{r}$ adeoq; $Q = \frac{s^2}{r^2}$ & propterea $D = Q \sim n = \frac{ss}{rr} \sim n$; tantundem itaq; erit dividere 2R per D, atq; $\frac{2s}{r}$ per $n \sim \frac{s^2}{r^2}$ sive (utrisq; in r^2 ductis) $2sr$ per $nr^2 \sim s^2$. Si itaq; quocunq; modo reperiatur differentia, numeri n expositi in quadratum aliquem ducti, ab alio quovis quadrato, aliquota pars dupli rectanguli sub duorum illorum quadratorum radicibus (puta $nr^2 \sim s^2$ aliquota pars numeri $2sr$); duplum hoc rectangulum, per differentiam illam divisum, quotientem exhibebit numerum integrum, qui radix erit quadrati quæsiti.

Dices. At quo pacto unum istiusmodi quadratum (a quo principium faciendum sit) reperiemus qui in n ductus, ab alio quadrato differat aliquota parte dupli istius Rectanguli? exponam illud itaq; more meo.

Quoniam exponitur n numerus integer non-quadratus, esto quadratus integer proxime major $c^2 = n + b$. Adeoq; ducto numero n, in quemvis quadratum, puta a^2; erit $na^2 = c^2a^2 - ba^2$. sive $nQa = Qca - bQa$. Hoc est, numerus datus n, ductus in Quadratum

 dratum

dratum numeri a; æquabitur quadrato ejusdem numeri a toties sumpti quoties indicat c latus quadrati proxime majoris numero dato, dempto ejusdem a quadrato toties sumpto quoties indicat b differentia numeri dati a quadrato proxime majore. Exempli gratia, sit $n = 7$. adeoq; $c = 3 = \sqrt{9}$. & $b = c^2 - n = 2$. Quicunq; sumatur numerus a, erit $na^2 = c^2 a^2 - ba^2$. sive $n Q a = Q c a, - b Q a$. Hoc est $7 Q a = Q 3 a, - 2 Q a$. Sumptis itaque, pro a, numeris successivis 1, 2, 3, 4 &c. res conspicietur ut in schemate. Ubi (manifestum est) propter numeros a, in primo loco, 1, 2, 3, 4, &c. arithmetice proportionales; erunt, & numeri ca in secundo loco 3, 6, 9, 12, &c. arithmetice item proportionales, quorum nempe continuus excessus est $c = 3$; & deniq; in tertio loco numeri ba^2; 2, 8, 18, 32, &c. (numerorum quadratorum continue sequentium æque multipli) differentias habebunt arithmetice proportionales, (quorum continuus excessus est $2b$.) Cum enim quadrati continue proximi, fiant ex continua additione numerorum imparium $1 + 3 + 5 + 7$. &c. (ut notum est) adeoq; ipsorum differentiæ continue crescant numero binario: eorundem æque multipli differentias habebunt continue cresentes per æque multiplum numeri binarij. Ut patet. Atq; ex hoc fundamento dependent omnes quæ sequuntur analogiæ arithmetice proportionalium, ut non opus sit illud identidem sæpius in sequentibus repetere.

$n Q a. = Q c a, - b a^2.$
$7 Q 1. = Q 3, - 2.$
$7 Q 2. = Q 6, - 8.$ [6]
$7 Q 3. = Q 9, - 18.$ [10]
$7 Q 4. = Q 12, - 32.$ [14]
$7 Q 5. = Q 15, - 50.$ [18]
&c.

$1 = 1.$
$4 = 1 + 3.$
$9 = 1 + 3 + 5.$
$16 = 1 + 3 + 5 + 7.$
&c,

$1b = 1b.$
$4b = 1b + 3b.$
$9b = 1b + 3b + 5b.$
&c.

His positis, Si $b = 1$, manifestum est numerum $a = 1$, esse quadratorum quæsitorum unum; quippe tum $na^2 = c^2 a^2 - ba^2 = c^2 - 1$. Quod contingit in numeris 3, 8, 15, &c. qui a quadrato unitate deficiunt.

Si vero b sit unitate major, manifestum est ba^2 esse majorem unitate; &, frustra quæri in illa columnâ defectûs numerum 1. (Haberi tamen ibidem quandoq; potest numerus qui hunc exhibeat

exhibeat, ut deinceps dicetur.)

Procedendum itaq; erit in columnam secundam, & deinceps in tertiam, quartam, &c. ut res postulabit; donec tandem reperiatur in aliqua columna numerus 1; vel saltem alius qui numerum illum, ut post docebitur, exhibebit.

In columnam autem sequentem transibitur, cum primum in præsente columna, *defectus* vel æquat vel superat duplum radicis adjacentis quadrati: Tunc enim sumpta radice proxime minore, defectus minuendus erit utriusq; radicis aggregato. Ut, in adjacente exemplo pro numero dato 7; reperitur ordine tertio 7Q3. = Q9, − 18. Cum itaq; 18 sit duplus radicis adjacentis 9, pro Q9, − 18, substituo in columna sequente Q8, − 1. ubi statim conspicitur *defectus* 1, quæsitus: adeoq; numeri 3 quadratus est quadratorum quæsitorum unus; quippe 7Q3, = 7×9 = 63 = Q8, − 1. Continuatâ vero eâdem columnâ, reperietur ordine sexto Q17, − 37. pro quo in sequente columna substituo Q16; − 4. (Quia nempe Q17, − Q16. = 17 + 16. = 33 = 37 − 4. Et sic semper. Duorum enim quadratorum continue proximorum, differentia est utriusq; radicis aggregatum.) Ubi conspicitur 7Q6. (= 252) = Q16, − 4. Quia vero *defectus* 4, est aliquota pars radicis adjacentis 16, manifestum est eundem 4 a fortiori esse aliquotam partem dupli rectanguli sub radicibus 6, & 16. Numero itaq; 2×6×16 = 192, per 4 diviso, quotiens 48 radix est alius ex quæsitis quadratis. Nempe 7Q48 = 7×2304 = 16128 = Q127, − 1. Habetur itaq; jam alius ex quæsitis. Sed & jam statim ab initio, in columna prima; cum habeatur 7Q2 = Q6, − 8. manifestum est, *defectum* 8, metiri duplum rectangulum sub 2 & 6. quippe 2×2×6 = 24. & 8) 24 (3. nempe radix quadrati superius inventi. Sed & iterum in eadem columna prima ordine quarto, habetur 7Q4. = Q12,

7Q1. = Q3, − 2.		
6		
2. = Q6, − 8.		
10		
3. = Q9, − 18.	= Q8, − 1.	
14	2	
4. = Q12, − 32.	= Q11 − 9.	
12	12	
5. = Q15, − 50.	= Q14, − 21	
	16	
6.	17, − 37.	= Q16, − 4.
&c.		14
		19, − 18.
		18

 =Q12,

$= Q:12, - 32$. & quia $2 \times 4 \times 12$ ($= 96$) divisus per 32, quotientem exhibet 3. habetur jam tertia vice ejusdem quadrati superius inventi radix. Quod & in eadem columnâ subinde sæpius continget; ut advertenti patebit. Nempe locis paribus, sive secundi multiplis. Imo & jam ipso loco primo, cum habeatur; differentia 2, erit ea aliquota pars dupli rectanguli $2 \times 1 \times 3$, quod per differentiam illam 2 divisum, exhibebit, ut prius, 3, radicem quadrati quæsiti; quod & similiter obtinget in singulis columnæ primæ locis.

Notandum autem est, non modo differentias 6, 10, 14, 18, &c. in columna prima; sed & 8, 12, 16, 20, &c. in secunda, & 14. 18, 22, 26, &c. in tertia; (& pariter in sequentibus omnibus) arithmetice proportionales esse, (in singulis utiq; communis excessus est 4, idem qui in columna prima:) ut facillimo negotio continuari possit columna quælibet, (sine operosa radicum eductione.) Sed & differentiæ item oblique sumptæ, ut 10, 8, & 14, 12, & 18, 16, 14, &c. sunt arithmetice proportionales, communis utique differentia est numerus 2: (quod & mutatis mutandis, conspicietur; quicunq; fuerit numerus n expositus:) ut facili item negotio fiat de columna in columnam transitus. Atq; eisdem de causis, facile erit quemvis numerum in quavis columna (etiam omissis intermediis) ad arbitrium exhibere, adeoq; operationes, ubi expedire videbitur per saltus continuare: Quod cum naturam progressionis arithmetice satis callentibus obvium sit, non opus est ut illud fusius ostendam.

Quod autem hactenus ostendi, sumpto quadrato s^2 majore quam est numerus n expositus: Id ipsum etiam eveniet sumpto quadrato minore. Non quidem ita ut exhibeatur ipse statim numerus quæsitus (uti cum primo repertus est $7Q3 = Q8, - 1.$) sed ut habeatur differentia quæ sit aliquota pars dupli rectanguli, (uti, cum, quia $7Q2 = Q6, - 8$, repertus est numerus 8, aliquota pars dupli rectanguli $2 \times 2 \times 6$. unde habetur quotiens 3, radix quæsiti quadrati.) Cum enim illud solum requiratur ut differentia $nr^2 \sim s^2$ dividat duplum rectangulum $2rs$, (non advertendo, uter duorum nr^2, s^2, sit numerus major.) perinde erit, quantum ad hoc negotium, num nr^2 unitate excedat quadratum, an unitate deficiat.

Exempli gratia, Exposito numero $n = 13$, reperietur ordine quinto

quinto, columnâ quarta, seu post primam tertia $13Q5. = Q18, + 1.$ Cum itaq; 1 differentia numerorum $13Q5$, & $Q18$, dividat duplum rectangulum $2 \times 5 \times 18 = 180$, quotientem item exhibens 180; erit

$nQa. = Qca, + ba^2$

$13Q1. = Q3, + 4.$

12

$2. = Q6, + 16. = Q7 + 3.$

14

&c.

$10, + 17$

22

$13, + 39. = Q14, + 12$

24

$17, + 36. = Q18, + 1.$

ille quadratorum quæsitorum unius radix. Utique $13 \times 180 \times 180 = 421200 = 649 \times 649, - 1.$ (Quod autem hactenus assumpsimus proc^2 quadratum vel proxime majorem vel proxime minorem dato numero; id arbitrarie factum est, nulla necessitate; nam & de quovis quadrato majore vel minore perinde procedunt omnia. Quod & in sequentibus intelligendum erit.)

Atq; hactenus satis expediisse videamur Problematis partem primam, nempe ut unum aliquem istiusmodi quadratum exhibeamus. Impossibile enim est, siquis istiusmodi omnino sit, ut non hoc pacto vel utrovis modo, vel saltem primo, detegatur.

Quoniam vero longum esse possit nonnunquam opus eo pervenire nisi compendio utamur; libet istiusmodi compendia, ex multis pauca, ad levandum calculum, insinuare.

Unum autem, idq; eximium, jam indicavimus, nempe si differentia $nr^2 \sim s^2$ dividat duplum rectangulum $2rs$. Quod quidem semper contingit quando differentia illa est vel 1 vel 2, nempe si nr^2 vel superet vel deficiat a quadrato quovis s^2, per numerum vel 1, vel 2. Nam ut 1 metitur quemvis numerum, sic & 2 quemvis parem, adeoq; $2rs$. sed & alias sæpe.

Alterum hoc esto. Quoniam ni conspiciatur $ba^2 = 1$, in prima columna (ut res statim absolvatur,) ut habeatur *defectus 1*, transeundum erit in columnas sequentes, unam vel plures, uti dictum est; quota vero columna hoc contingat si constet, constabit

stabit statim de radice quadrati quæsiti. Cum enim, in prima columna, radix assumpti quadrati sit ca, in secunda $ca-1$, in tertia $ca-2$. &c. ut patet (nempe in priori forma processus, ubi sumitur c^2 quadratus proxime major quam n: de forma posteriore post dicetur.) manifestum est radicem quadrati in quavis columna tot unitatibus minorem esse quam est radix quadrati in columna prima, quot illa locis a prima distat: quæ distantia sive differentia dicatur d, adeoq; radix quadrati in qualibet columna $ca-d$. cujus quadratum $c^2a^2-2cda+d^2$ cum quadratus c^2a^2 excedat numero $2cda-d^2$ eodem minuendus erit adjunctus defectus ba^2, (ut nempe utrobique differentia eadem sit, nempe $=na^2$.) erit itaq; $ba^2-2cda+d^2$. Vellem autem ut defectus sic minutus sit 1. Ponendum igitur $ba^2-2cda+d^2=1$, & (transponendo) $d^2-1=2cda-ba^2$. adeoq; $\frac{d^2-1}{b}=\frac{2cd}{b}a-a^2$. & (resolvendo æquationem) $a=\frac{cd}{b}\pm\sqrt{:\frac{c^2d^2-bd^2+b}{b^2}}=\frac{cd\pm\sqrt{:c^2d^2-bd^2+b,}}{b}=\frac{cd\pm\sqrt{:nd^2+b:}}{b}$ (nempe propter $c^2=n+b$, adeoque $c^2-b=n$, & $c^2d^2-bd^2=nd^2$) adeoque cognito d, cognoscitur a.

His positis. Ut cognoscatur d, quærendum erit, (eodem modo quo prius de a dictum est) quis quadratus ductus in numerum datum, assumpto numero b, faciat quadratum; (ut nempe $\sqrt{:nd^2+b:}$ sit numerus rationalis integer) quod quamvis videatur nihilo facilius reperiri posse quā quod primum petebatur; tamen hinc magnum futurum operæ compendium, certum est, quia d (numerus columnarum post primam) minor semper erit quam a (numerus unitatum in quæsiti quadrati radice) ut per se patet: adeoq; citius eo pervenietur ubi habebitur defectus b, quam ubi defectus 1. Exempli gratia. Exposito numero $n=13$, adeoque $13Q1,=Q4,-3$. Non ante locum 180 reperietur defectus 1. (ubi nempe $13Q180,=Q649,-1$.) adeoque $a=180$. At reperietur defectus $b=3$, loco saltem 71 (nempe $13Q71,=Q256,-3$) adeoq; $d=71$. (qui statim exhibebit $a=180$ ut prius) unde manifestum est plus dimidio operis abscindi.

Si tamen contingat, quod & quandoq; fit, ut numerus d sic primo

primo inventus non exhibeat a numerum integrum, sed fractum; adeoq; præsenti negotio non accommodum; procedendum erit ad secundum, vel etiam tertium, aliumve istiusmodi d qui exhibeat a integrum. quod & in sequentibus intelligendum erit.

Quodsi neq; hæc operationis contractio satis expedita videatur; cum nonnunquam etiam satis tarde ad ipsum d perveniatur: Etiam hæc iniquisitio eadem arte adjuvanda erit atque præcedens. Vti enim prius ad inveniendum a, quærebatur, quota columna reperiendus erat imperatus defectus 1; ita jam quærendum, quota columna reperietur defectus b. Nempe, cum (propter $c^2 = n+b$) sit $nd^2 = c^2d^2 - bd^2$, sitque bd^2 defectus justo major, (saltem, nisi sit $d = 1$; quippe jam quæritur defectus b;) minuendus erit quadratus c^2d^2, uti prius minuimus quadratum c^2a^2, ut defectus pariter minutus sit b. Sicut itaque pro quadrati radice ca substituimus $ca-d$; ita jam pro cd substituamus $cd-e$, (ut sit e numerus columnam innuens qua reperiatur defectus b.) Erit autem, quadratorum ex his radicibus, differentia $2ced-e^2$. quæ pariter ex defectu bd^2 sublata relinquet $bd^2 - 2ced + e^2 = b$. adeoq; $e^2 - b = 2ced - bd^2$, & $\frac{e^2 - b}{b} = \frac{2ce}{b}d - d^2$.

Et (resolvendo æquationem) $d = \frac{ce \pm \sqrt{: c^2e^2 - be^2 + b^2 :}}{b} = \frac{ce \pm \sqrt{: ne^2 + b^2 :}}{b}$. Exempli gratia. Exposito, ut prius, $n = 13$. reperietur ordine vicesimo octavo; 13 Q 28, = Q 101, - 9. & propterea (quia $9 = b^2$) erit $e = 28$. qui exhibebit $d = 71$, & $a = 180$. Adeoq; quem laborem prius a loco 180, ad locum 71, retraxeram, jam videas ad locum 28 retractum.

Sed & eadem methodo, etiam adhuc magis retrahamus. Quippe eodem modo ostendetur, siquando res postulet, ulterius adhuc contrahendum negotium. Nam uti ostendimus $\frac{cd \pm \sqrt{: nd^2 + b :}}{b} = a$. & $\frac{ce \pm \sqrt{; ne^2 + b_2 .}}{b} = d$. Ita ostendetur $\frac{cf \pm \sqrt{: nf^2 + b^2 ;}}{b} = e$ & $\frac{cg \pm \sqrt{: ng^2 + b^4 ;}}{b} = f$, & $\frac{ch \pm \sqrt{: nh^2 + b^5}}{b} = g$,

& sic deinceps. Vt jam eò redigatur negotium; ut in processu

ut

ut prius inchoato, observemus, siquando *defectus* occurrat, vel 1, vel 2, vel etiam alius quilibet qui metiatur duplum rectangulum $2\,r\,s$ supra memoratum; (nam ubi hoc occurrit rem statim absolvi jam supra dictum est;) vel etiam b, ejusve ulla potestas, puta b^2, b^3 &c. Ubi enim occurrit defectus b, habetur d; ubi b^2, habetur e; ubi b^3, habetur f; & sic deinceps. Horum autem uno cognito, reliquos retrocedendo exhiberi satis patet; nisi saltem hoc pacto prodeant numeri fracti; quod ubi contingit ulterius adhuc in incepto examine procedendum erit, ut supra monitum est. Exempli gratia. Exposito, ut prius, $n = 13$. Conspicitur ordine undecimo, (columna post primam quarta) 13 Q11, = Q40, − 27. adeoque (quia $27 = b^3$) erit $11 = f$, qui exhibebit $e = 28$, adeoq; $d = 71$, & $a = 180$. ut supra. Negligimus autem, in columna prima, tum defectum 3 loco primo, tum defectum 27 loco tertio, tum &, loco octavo, columnâ post

13 Q1. = Q4, − 3.
2. = Q8, − 12.
3. = Q12, − 27. = Q11, − 4.
4. = Q16, − 48. = Q15, − 17.
&c.
19, − 36.
23, − 61. = Q22, − 16.
26, − 37.
30, − 68. = Q29, − 9.
33, − 36.
37, − 69.
41, − 108. = Q40, − 27.

primam tertia, defectum 9: quia, quovis horum sumpto, prodiret a numerus fractus; (nempe vel o, vel $\frac{2}{3}$, vel saltem $\frac{464}{9}$) adeoque huic negotio non accommodus. Retractum itaq; jam est negotium, a loco 180, ad locum 11. Non autem, in praesenti numero exposito, ulterius retrahetur negotium, nisi saltem ad columnas his superiores transeatur. Cum enim numerus $f = 11$, ut jam dictum est, reperietur ordine undecimo, columna post primâ quarta; est quidem $g = 4$ (nempe 13 Q4, = Q17, − 81) verum in nulla ex his columnis reperiendus, sed ea quae harum primae

proxime

proxime est superior; quippe $17 = ca\,11$. (Quod & a fortiori de sequentibus h, i, &c. judicandum erit.) Vel etiam $g = 84$, (quippe $13Q84, = Q303, - 81$,) qui quidem exhibebit (non modo $f = 213$, sed &) $f = 11$, sed (ut patet) serius occurrit, quam ipse f.

Nec erit fortassis incommodum hic notare; ut ex cognito, verbi gratia, d, cognoscitur a; sic vice versa ex cognito a cognoscitur d; (& in reliquis pariter.) Quippe, cum sit (ut supra ostensum est) $ba^2 - 2cda + d^2 = 1$: erit (ordinando & resolvendo æquationes) tum $a = \frac{cd \pm \sqrt{:nd^2 + b:}}{b}$ (ut jam dictum est) tum $d = ca \pm \sqrt{; na^2 + 1}$. Eodem modo; Quia $bd^2 - 2ced + e^2 = b$; erit, tum $d = \frac{ce \pm \sqrt{:ne^2 + b}}{b}$ tum $e = cd \pm \sqrt{:nd^2 \pm b}$. & in reliquis similiter.

Sed & hinc etiam sequitur, $ba = e$, (& similiter $bd = f$, $be = g$, &c.) cum enim sit $a = \frac{cd \pm \sqrt{:nd^2 \pm b:}}{b}$ erit $ba = cd \pm \sqrt{;nd^2 b:} = e$. (& similiter in reliquis.) Cum hoc tamen discrimine, quod, quantitatis utrobique ambigue designatæ, in altera major, in altera minor designatio, sit præsenti negotio magis accommoda. Nam, verbi gratia, si sumatur $ba = cd - \sqrt{:nd^2 + b}$; erit a, vel numerus fractus (nempe si b non metiatur numerum $cd - \sqrt{:nd^2 + b}$) vel (si integer) citius occurret (sic ut dictum est inquirenti) quam ipse a, vel e. Et contra, si pro e sumatur quantitas major, nempe $cd + \sqrt{.nd^2 + b}$, (quamquam & sic sit numerus integer) serius occurret (sic investiganti) quam ipse a, utpote hoc major. Quod autem de a & e jam dictum est, perinde etiam valet de d & f, item de e & g, &c. Adeoque si ab invento (verbi gratia) e, retrocedendum sit ad inveniendos (per æquationes expositas) d, a, sumendæ sunt quantitates majores; sin progrediendum ad sequentes f, g, &c. sumendæ quantitates minores, ut præsenti negotio magis accommodæ.

Quam autem operis abbreviationem hactenus adhibuimus ubi quæritur na^2 unitate minor quadrato (adeoque sumitur c^2 major quam n;) eadem plane mutatis mutandis, adhibenda erit si quæretur na^2 vel nr^2 unitate major quadrato, (sumpto c^2 quadrato proxime minore;) vel etiam si quæratur

na^2 vel nr^2 qui quadratum superet, vel ab eo deficiet, binario. (Quanquam enim hoc pacto a^2 non sit quadratus primo quæsitus, eundem tamen exhibebit ut supra dictum est;) Res utique ad hanc formam prodibit.

Si na^2 à quadrato unitate deficiat.

$$b\,]\; cd \pm \surd;\, nd^2+b;\; [\,a.$$
$$b\,]\; ce \pm \surd;\, ne^2+b^2;\; [\,d.$$
$$b\,]\; cf \pm \surd;\, nf^2+b^3;\; [\,e.$$
$$b\,]\; cg \pm \surd;\, ng^2+b^4;\; [\,f.$$
$$b\,]\; ch \pm \surd;\, nh^2+b^5;\; [\,g.$$

&c.

Si quadratum unitate superet.

$$b\,]\; \surd;\, nd\; -b; - cd.\; [\,a.$$
$$b\,]\; \surd;\, ne^2+b^2; - ce.\; [\,d.$$
$$b\,]\; \surd;\, nf^2-b^3 - cf.\; [\,e.$$
$$b\,]\; \surd;\, ng^2+b^4 - cg.\; [\,f.$$
$$b\,]\; \surd;\, nh^2-b^5 - ch.\; [\,g.$$

&c.

Si binario deficiat.

$$b\,]\; cd \pm \surd;\, nd^2+2b.\; [\,a.$$
$$b\,]\; ce \pm \surd;\, ne^2+2b^2.\; [\,d.$$
$$b\,]\; cf \pm \surd;\, nf^2+2b^3.\; [\,e.$$
$$b\,]\; cg \pm \surd;\, ng^2+2b^4.\; [\,f.$$
$$b\,]\; ch \pm \surd;\, nh^2+2b^5.\; [\,g.$$

&c.

Si binario superet.

$$b\,]\; \surd;\, nd^2-2b: - cd.\; [\,a.$$
$$b\,]\; \surd;\, ne^2+2b^2: - ce.\; [\,d.$$
$$b\,]\; \surd;\, nf^2-2b^3: - cf.\; [\,e.$$
$$b\,]\; \surd;\, ng^2+2b^4: - cg.\; [\,f.$$
$$b\,]\; \surd;\, nh^2-2b^5: - ch.\; [\,g.$$

&c.

Atque ad eandem formam procedendum esset si investigandus esset na^2 quovis numero vel à quadrato deficiens, vel quadratum superans. (Intellige, quatenus res est possibilis: Non enim universaliter verum est, de quovis numero, etiam nonquadrato, ut in quadratum integrum ductus datâ qualibet differentiâ quadratum aliquem vel superet, vel ab eo deficiat.) Quoniam vero in præsenti negotio certum est tum 1, tum 2, dividere quemvis $2rs$, non autem de aliis numeris id certò vel universaliter constet; his saltem attendisse sufficiet. Adeoque si (calculo ut supra instituto) inveniatur na^2 qui a quadrato aliquo differat numeris 1, vel 2, aliave parte aliquota dupli rectanguli sub radicibus; vel qui à quadrato *deficiat* numero b (differentiâ numeri dati à quadrato aliquo majori) ejusve quâvis potestate, aut cujusvis etiam potestatis duplo; vel denique qui quadratum *superet* numero b (differentiâ numeri dati à quadrato aliquo *minori*) ejusve duplo, vel ipsius quavis pote-

state

ſtate à numero *impari* denominata hujuſve duplo, aut *deficiat* poteſtate à numero *pari* denominata, aut hujus duplo. Ubi enim horum quicquam contingit, habebitur vel numerus a, radix quadrati quæſiti, vel qui illum ſtatim exhibebit; vel ſaltem ex numeris d, e, f, &c. aliquis qui retrocedendo exhibebit a; niſi ſi quando ſic inventus a prodeat numerus fractus, quo caſu ulterius procedendum erit ut ſupra dictum.

Exempli gratia. Expoſito numero $n = 149$; (ſumpto $c = 12$, adeoque $b = 149 - 144 = 5$;) reperietur loco decimo ſeptimo, columna tertia, ſive poſt primam ſecundâ (neque enim neceſſe erit ultra locum decimum ſeptimum procedere) 149 Q17 = Q206, + 625, adeoque propter $625 = b^4$) erit $g = 17$. unde retrocedendo, reperietur $f = 82$, $e = 397$, $d = 1922$, & tandem a vel $r = 9305$; cujus quadratus in n ductus, cum quadratum unitate ſuperet, (nempe $149 \times 9305 \times 9305 = 12900870725 = Q113582, - 1$. ſive $Qs - 1$.) duplum rectangulum $2rs = 2 \times 9305 \times 113582$, per $m^2 - s^2 = 1$ diviſum, exhibebit $2113761020 = a$ radicem quadrati quæſiti, qui in $n = 149$ ductus, unitate minor erit quadrato numeri 25801741449. (Atque id ipſum obveniſſet, ſi, neglecto loco decimo ſeptimo, proceſſum eſſet ad locum 82, vel 397, &c. ubi haberentur $f = 82$, & $e = 397$, &c.) Habemus itaque jam ordine 17°, numerum illum, qui, dictâ methodo, numerum quæſitum exhibet ſatis grandem; minimus utique ex quadratis quæſitis rem imperatam abſolventibus figuris ſaltem 19 ſcribendus erit; nempe 4467985649671440400 (quadratus numeri 2113761020, ut dictum eſt) qui in 149 ductus, unitate minor erit quam 665729861801044619601 quadratus numeri, 25801741449.

Atque hæc de preſenti operis abbreviandi methodo, ſatis ſuperque dicta videantur, quanquam & haud ignorem etiam adhuc plura adjungi poſſe (quæ & hanc abbreviationem abbreviarent) ni meturem ne nimis prolixus eſſem.

Putaſſem etiam & aliam adjunxiſſe abbreviandi methodum. Nempe, quo pacto poſſimus dictam inveſtigationem per ſaltus continuare; (quod, ubi res in longum ſit tranſitura, uti quandoq; evenit, uſui eſſe poſſit,) ita quidem ut aliquando nè centeſimum quemque locum opus ſit examinare Verum illud neque mihi jam neceſſum videtur, ne nimius ſim; vel, ſi tu inſuper & illud exigas, alias fiet.

 Quod

quod superest: Expositâ jam, uti fusè factum est, methodo investigandi unum aliquem quadratum negotio accommodum, qui nempe in expositum numerum ductus, assumpta unitate, conficiat quadratum. Ostendendum insuper est, qua methodo istiusmodi infinitos exhibeamus, nedum omnes possibiles. Quod tamen quam brevissime fiet. Neque enim ego tua tibi exponendo prolixus esse debeam.

Jam supra dictum est; *Quoties differentia* $nr^2 \sim s^2$ est aliquota pars dupli rectanguli $2rs$; si hoc per illam dividatur, quotiens erit radix quadrati accommodi. Esto igitur jam cognitus, (ex investigatione supra tradita) unus aliquis quadratus negotio accommodus, qui jam dicatur r^2. Quoniam igitur, ex hypothesi, nr^2+1, est numerus quadratus, dicatur s^2. Cum itaque sit $nr^2+1=s^2$, erit $nr^2-s^2=1$. Et propterea, cum 1 nullum nonmetiatur numerum integrũ, certum est & differantiã hanc $nr^2-s^2=1$, metiri duplum rectangulum $2rs$; adeoque quotiens divisione emergens erit radix secundi quadrati negotio item accómmodi. Et eodem modo ex hoc secundo investigabitur alius, & ex illo alius, & sic in infinitum.

Atque hæc quidem solutio, quamquam abunde satisfaciat quæsito, infinitos istiusmodi postulanti: non tamen omnino omnes possibiles exhibet. Exempli gratia. Exposito numero $n=3$, erit quadrati primi radix 1, unde colligitur secundi radix 4, atqueinde sequentium 56, 10864, 408855776, &c. Cum interim alii omittantur intermedii plurimi, nempe quadrati radicum harum, 15, 209, 780, 2911, 40545, 151316, 564719, 2107560, 7865521, 29354524, 109552575.

Has autem intermediorum radices hæc exhibebit Regula.

r in r.	r in 1.
t.	t.
t^2-1.	u.
t^3-2t.	x.
t^4-3t^2+1.	y.
t^5-4t^3+3t.	z.
$t^6-5t^4+6t^2-1$,	a.
&c.	&c.

Sit n, numerus expositus; r, radix quadrati primi seu minimi (negotio accommodi) modo superius tradito jam inventi; & $t=2\sqrt{:nr^2+1}$. erit radix primi, r, vel r in 1; secundi, r in t; tertii, r in t^2-1; quarti, r in t^3-2t; quinti, r in t^4-3t^2+1; & reliquorum deinceps juxta seriem adscriptam. (Cujus quidem constructio etiam primo aspectu,

aspectu obvia est: saltem si illud innuatur; numeros locis primis adscriptos, subintellectos saltem, esse monadicos, 1,1,1,&c. secundis lineares, 1,2,3, &c. ex continua monadicorum additione ortos, 1 + 1 + 1 &c. tertiis triangulares, 1, 3, 6, &c. ex continua additione linearium 1 + 2 + 3, &c. quartis pyramidales, 1, 4, 10, &c. ex continua additione triangularium, 1 + 3 + 6 &c. Et sic deinceps.) Vel etiam, si pro t, t^2-1, t^3-2t, &c. statuamus t, u, x, &c. erit $u=tt-1$, $x=tu-t$, $y=tx-u$, $z=ty-x$ &c. nempe constat quilibet ex præcedentium ultimo in t ducto, dempto penultimo. Vel denique (nam & hæc forsan designatio placebit potius nonnullis) si numerus expositus sit, verbi gratia 3; fiet eadem series ad hanc formam;

$$3 \text{ in } Q: 1 \times 3\tfrac{1}{1} \times 3\tfrac{3}{4} \times 3\tfrac{11}{15} \times 3\tfrac{41}{56} \times 3\tfrac{153}{209}, \&c.$$

Sic exposito $n=2$, fiet series

$$2 \text{ in } Q: 2 \times 5\tfrac{1}{1} \times 5\tfrac{5}{6} \times 5\tfrac{29}{35} \times 5\tfrac{169}{204} \times 5\tfrac{985}{1189}, \&c.$$

Ubi cognitis radicum prima & secunda (ut prius) reliquæ ea ratione constituuntur ut Fractionum sequentium Numerator æquet ubique denominatorem suum dempto denominatore proxime præcedente; Denominator autem æquet numeratorem termini proxime præcedentis in impropriam fractionē reducti.

Hæc autem ni satis superque sufficiant præsenti negotio expediendo; etiam hoc licet adjicere. Inventa hujusmodi serie qualibet, quæ numero cuivis non-quadrato, puta $n=2$, conveniat; habentur statim series quæ conveniant, ejusdem numeri per quemvis quadratum multiplo, puta nm^2, nempe dividendo seriem radicum jam inventam per istius quadrati radicem m: Hoc pacto;

$$2, \text{ in } Q: 2 \times 5\tfrac{1}{1} \times 5\tfrac{5}{6} \times 5\tfrac{29}{35} \times 5\tfrac{169}{204} \times 5\tfrac{985}{1189}, \&c.$$

$$8, \text{ in } Q: 1 \times 5\tfrac{1}{1} \times 5\tfrac{5}{6} \times 5\tfrac{29}{35} \times 5\tfrac{169}{204} \times 5\tfrac{985}{1189}, \&c.$$

$$18, \text{ in } Q: 4 \times 33\tfrac{1}{1} \times 33\tfrac{33}{34} \times 33\tfrac{1121}{1155}, \&c.$$

$$32, \text{ in } Q: 3 \times 33\tfrac{1}{1} \times 33\tfrac{33}{34} \times 33\tfrac{1121}{1155}, \&c.$$

$$50, \text{ in } Q: 14 \times 197\tfrac{1}{1} \times 197\tfrac{197}{198}, \&c.$$

72, in Q: $2 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{11}{14} \times 33\frac{1111}{1134}$, &c.

98, in Q: $10 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{111}{174}$, &c.

128, in Q: $51 \times$

162, in Q: $1540 \times$

200, in Q: $7 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{111}{111}$, &c.

242, in Q: $1260 \times$

288, in Q: $1 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{11}{14} \times 33\frac{1111}{1131}$, &c.

Hoc est.

2, in Q:	2,	12,	70,	408,	2378,	13860. &c.
8, in Q:	1,	6,	35,	204,	1189.	6930. &c.
18, in Q:		4,		136,		4620. &c.
32, in Q:		3,		102,		3465. &c.
50, in Q:			14,			2772 &c.
72, in Q:		2,		68,		2310 &c.
98, in Q:			10,			1980. &c.
128, in Q:				51,		
162, in Q:						1540 &c.
200, in Q:			7,			1386. &c.
242, in Q:						1260. &c.
288, in Q:		1,		34,		1155. &c.

Ubi videre est, nunc singulos, nunc alternos, nunc tertium quemq; seriei numerũ, vel etiam quartum, quintum, &c. divisionis hujusce capacem esse. Et similiter de aliis numeris judicandum erit.

Sed nec incommodum erit monere, quod et supra innuimus, (quamquam à præsenti negotio alienum,) si in exposita quæstione, pro *adscita unitate*, dixisset *adscito quovis numero quadrato*, puta k^2; series quadratorum quos jam invenimus, ducendæ essent in datum illum quadratum k^2; (sive, quod tantundem valet, quadratorum radices ducendæ essent in k) exempli gratia. Quoniam, exposito numero $n = 2$, si petatur ut na^2 unitate deficiat à quadrato, erit $na^2 = 2$ in Q: 2, 12, 70. &c. si

si peteretur ut na a numero novenario à quadrato deficiat, esset $na^2 = 2$ in 9 Q: 2, 12, 70, &c. Quæ quidem series infinitos semper quadratos exhiberet rem imperatam præstantes, utut non semper omnes. Verum hoc monuisse sufficiat.

Atque hæc præcipua sunt eorum quæ de hoc negotio dicenda putavi; quæ mandatis tuis obsequens in hanc collegi summam. Id superest, ut siquid admissum sit quo minus omnia ex voto tuo fuerint, benignus condones; solitoque tuo favore prosequi ne dedigneris,

Oxoniæ Decem. 17. 1657.

Insignissime Domine,
Dnis. Væ. Observantissimum,

Johannem Wallis.

POstquam exaraveram reliqua, visum est & hanc tuam subjungere methodum investigandi primum quadratum, alia plane forma quam quæ supra habetur. Esto, verbi gratia, expositus numerus non-quadratus $n = 13$, et quadratus quæsitus a^2, adeoque $13a^2 + 1$ numerus quadratus. Erit

$$13a^2 + 1 = 9a^2 + 6ab + b^2$$

Hoc est $4a^2 + 1 = 6ab + b^2 =$

Est ergo $2b > a > b$.

Esto $a = b + c$. *Adeoque*

$$4b^2 + 8bc + 4c^2 + 1 = 6b^2 + 6bc + b^2$$

Hoc est $2bc + 4c^2 + 1 = 3b^2 =$

$$2c > b > c$$

$$b = c + d.$$

$$2c^2 + 2cd + 4c^2 + 1 = 3c^2 + 6cd + 3d^2$$

$$3c^2 + 1 = 4cd + 3d^2 =$$

$$2d > c > d$$

$$c = d + e$$

$$3d^2 + 6de + 3e^2 + 1 = 4d^2 + 4de + 3d^2$$

$$2de + 3e^2 + 1 = 4d^2 =$$

$$2e > d > e$$

$$d = e + f$$

$$2e^2 + 2ef + 3e^2 + 1 = 4e^2 + 8ef + 4f^2$$

$$e^2 + 1 = 6ef + 4f^2 = \text{———}$$

$$7f > e > 6f$$

$$e = 6f + g$$

$$36f^2 + 12fg + g^2 + 1 = 36f^2 + 6fg + 4f^2$$

$$6fg + g^2 + 1 = 4f^2 = \text{———}$$

$$2g > f > g$$

$$f = g + h$$

$$6g^2 + 6gh + g^2 + 1 = 4g^2 + 8gh + h^2$$

$$3g^2 + 1 = 2gh + gh^2 = \text{———}$$

$$2h > g > h$$

$$g = h + j$$

$$3h^2 \pm 6hj + 3j^2 + 1 = 2h^2 \pm 2hj + 4h^2$$

$$2j = h$$

$$j = 1.$$

Ergo $j = 1.$
$h = 2.$
$g = 3.$
$f = 5$
$e = 33.$
$d = 38.$
$c = 71.$
$b = 109.$
$a = 180.$

Atque eodem modo procedendum erit exposito quovis numero non quadrato.

EPI-

EPISTOLA XVIII.

D. Joh. Wallis *ad* D. *Kenelmum Digby*

Illustrissime Domine,

ACcepi nudiustertius, sero vesperi, quem heri perlegebam, D: Frenicli de Problematis Fermatianis. Tractatum, a Dne Va, ad Honoratiss. D. Vicecomitem *Brouncker* nuper transmissum, qui & eundem mihi dignatus est impertire: quem nec prius videram, nec inaudiveram de eo quidquam, quam ex receptis Honoratiss. Vice-Comitis literis hoc fuerim edoctus.

Certum autem est, ex tractatu illo, Clarissimum Virum, vel non vidisse literas nostras Parisios tibi missas, (quod malim existimare,) vel parum candide egisse (nobiscum, dicam? an) cum gente nostra.

Incipit jam statim ab insultu in gentem nostram, nec solum nostram, sed Belgas, nedum & Gallorum suorum reliquos conjungit. En inquit *tibi, Vir Illustrissime, Lutetia praebet quam neq; Angli tui, neq; Belgae, usq; modo praestare potuerunt Problematum solutionem; Gestit Gallia Celtica palmam Narbonensi praeripere. &c.* Sed & subinde saepius subinnuit, *Alios plerosq; Mathematicos tam in Anglia quam in Batavia eorum solutioni operam dare*; vel etiam *in his solvendis insudare*; sed & *in cassum ab Anglis & Batavis se expectasse, cum nihilonimus pleriq; in haec insudarint*: atq; istiusmodi alia.

De Gallis Batavisq; quid dicendum sit, mea minus interest solicitum esse, ut qui quid apud illos factum sit ignorem. De Anglis tuis est quod dicam. Et primo quidem, etiamsi nihil hac in re ab Anglis factum fuisset, cur tamen de gente nostra triumphum agat nihil est; cum ne centesimus quisque ex nostris Mathematicus, vel haec aggressus est problemata, vel de illis inaudiverat quicquam, nedum *in ijs solvendis plerique insudarint.* Nescio enim, si D. Vice-Com. *Brouncker* & meipsum excipias, num ex Anglis quisquam Mathematicus, vel unam horulam his solvendis impenderit, vel de illis omnino quidpiam cogitaverit; certe quotquot ego noverim (quantum hactenus intelligo) vel ea penitus ignorarunt, vel negligebant saltem. Non enim, si privatis forte literis dixerit Vir Nobilissimus se omnibus Europae

L Mathe-

Mathematicis ea proponere, existimandum erit eadem statim & omnibus innotescere, nedum ut se protenus ad id operis accingant.

Nos autem quod attinet duos, Fatemur equidem fieri posse ut Clariss. Vir ea prius solverit problemata (duo saltem priora) quam utervis nostrum. Neque id mirum, quippe jam duobus ante mensibus solverat (uti videtur) quam fuerint omnino huc allata: Perhibetur enim ea jam 10 *Cal. Febr. st. n.* solvisse, quæ (utut mihi videantur nominatim inscripta) neuter nostrum viderat ante 2 *Nonas Mart. st. vet.* (nempe post 8 integras septimanas, biduo minus) quippe tum nuperrime Parisijs Londinum allata, Oxonium paulo adhuc serius transmittebantur.

Quid autem hac in re tum demum præstitimus, non opus est ut iterato multis ostendam, cum id jam præcedentibus literis nostris aliquoties indicatum tibi fuerit. *Quia* vero sparsim ea atque aliis immista, (nam & de aliis pluribus, & quidem majoris momenti rebus ab eodem D. Fermatio interrogati fuimus, iisque respondimus,) quæ de hoc negotio scripta fuerint, reperiantur; commodum esse videatur eorum summam colligere, & simul conspiciendam exhibere; ut videatur quam immerito vel de nobis vel de gente nostra triumphetur. Sed & (quia de *mora* aliquoties postulari videamur) momenta temporis notanda duximus.

Priora duo problemata his erant verbis exposita.

Proponatur (si placet) Wallisio, *& reliquis Angliæ Mathematicis sequens quæstio numerica.*

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum. Ex. Gr. *Numerus* 343 *est cubus a latere* 7. *omnes ipsius partes aliquotæ sunt* 1, 7, 49. *quæ adjunctæ ipsi* 343, *conficiunt numerum* 400. *qui est quadratus a latere* 20. *Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.*

Quæritur etiam numerus Quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia, aut Gallia Belgica, & Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis; easq; in pignus nascentis amicitiæ Dom. Digby *offeret & dicabit.*

Hæc chartula (ne moræ incusemur) per D *White* (per quem erat Parisijs ad nos deferenda) Londini tradebatur D. Vicecom.

com. *Brouncker*, Martij 4. *stilo veteri*; a quo postridie transmissa Oxonium appulit Mart. 6. sero vesperi; cui protinus responsum dedi, per Veredarium postridie jam multo mane abeuntem Londinum perferendum. Cujus hæc fere summa.

Quæstiones expositas ejusdem fere generis esse cum ijs quæ de numeris perfectis (ut loquuntur) & Deficientibus aut Redundantibus proponuntur, quæque ad universalem aliquam æquationem, quæ ad omnes casus respiciat, vix aut ne vix reducuntur. Utriq; autem satisfacere unum eundemque numerum 1, *ut qui tum quadratus est, tum cubus, & partes aliquotas nullas habet.* Subjuncto simul, problemate, horum simillimo, (cui necdum quicquam responsi nactus sum) *Invenire duos numeros quadratos, qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam Ex. gr.* $16+8+4+2+1=31=25+5+1$. *Inveniantur hujusmodi alii duo.*

Solutioni huic nostræ, subjunxit deinceps suam Honoratissimus Vicecomes, nempe, *Non modo numerum ipsum* 1, *sed & (si fractiones admittantur) eundem per cujusvis integri potestatem sextam divisum: Et quidem, quod ad priorem quæstionem, numerum item* 343 *sic divisum. Puta* $\frac{343}{64}$. *Siquidem numerus fractus cum partes non alias habeat actuales quam quæ toti sunt cognomines, non alias habebit partes aliquotas expositus cubus* $\frac{343}{64}$ *quam* $\frac{1}{64}$ $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, *quæ cum ipso* $\frac{343}{64}$ *conficiunt* $\frac{400}{64}$ *numerum quadratum* Non est itaque cur conqueratur vel D. Frenicle, vel etiam D. Fermat, a nemine Anglorum Problematis satisfactum; cum nemo sit (quem scio) Anglorum qui ea aggressus est, quin & solverit.

Ea vero cum in promptu esset solutio, (nec nisi unus istiusmodi peteretur,) in immensis porro numeris ruspandum esse non censui. Neq; enim res ipsa (non magni, uti mihi videbatur, momenti) postulabat, neq; etiam, si vel ego maxime vellem, tum vacabat: Quippe occupatissimum me deprehendit ea quæstio, ad mortui fratris funera abiturientem.

Nondum autem a funere domum redux, (quod post duas, si memini, septimanas contigit,) D. Vicecomitem Londini compellans, ab eodem intellexi, se interea temporis jam aliam ab eodem D. Fermatio quæstionem accepisse; cui, post habitis prioribus, (ut quas, uti jam videtur, D. Frenicle jam ante solverat) magis confidebat Fermatius: eiq; se respondisse, suumque ad hanc unà cum præcedentibus responsum D. White jam

L 2 tum

tum exhibuisset; a quo, uti videtur, Parisios statim mittebatur: ut neq; sit cur vel hic de mora insimulemur.

Hæc autem tertia quæstio, (post præmissam præfationem, *Quæstiones pure Arithmeticas, vix est qui proponat, vix qui intelligat &c.* his erat verbis exposita.

D*ato quovis numero non quadrato, dantur infiniti quadrati, qui in datum numerum ducti adscita unitate conficiant quadratum. &c.* Sed *Canonem generalem dato quovis numero non quadrato inquirimus* &c.

Canonem qui petebatur generalem hunc exhibuerat Honoratissimus Vicecomes, demonstratione sua firmatum.

Sit N, *numerus datus quilibet, quadratus vel non-quadratus, integer aut fractus.* Q, *quilibet alius quadratus, (sive integer sive fractus.)*

$D = N \sim Q$, *differentia duorum* N & Q. *puta* $N - Q$, vel $Q - N$.

Canon. Est $N \times \frac{4Q}{D^2}, +1$, *numerus quadratus. Nam*

$$N \times \frac{4Q}{D^2}, +1, = \frac{4QN + D^2}{D^2} = \frac{Q^2 + 2QN + N^2}{Q^2 - 2QN + N^2} = \frac{Q+N}{Q-N} \times \frac{Q+N}{Q-N}$$

Solutionem hanc legitimam esse, nemo est qui dubitet, (modo intelligat:) ut nec legitime demonstratam esse (quod tamen non petebatur.) Siquis tamen ob notas Analyticas hæreat: His habeat verbi expositam.

Si quadrati cujusvis quadruplus, per quadratum suæ a numero exposito differentiæ dividatur; prodibit quadratus requisitus: qui nempe in expositum numerum ductus adscita unitate, conficiet quadratum.

Huic similem etiam alium Canonem, (sed serius, quæstionem utique tum non inaudiveram;) Parisios ipse misi.

Sit, N *numerus datus quilibet.* A, *quilibet ad arbitrium assumptus per quem* Q *quadratus quilibet dividatur: quotientem exhibens* M; *qui porro per* 4P *(cujusvis numeri quadruplum) divisus quotientem exhibeat* O; *sitq;* D *duorum* OA, PN, *differentia. Est, inquam,* $\frac{MA}{D^2}$ *quadratus quæsitus,* Nam

$$\frac{MAN}{D^2} + 1 = \frac{MAN + D^2}{D^2} \quad \frac{O^2A^2 + \frac{1}{2}MAN + P^2N^2}{O^2A^2 - \frac{1}{2}MAN + P^2N^2} = \frac{OA + PN}{OA - PN} \times \frac{OA + PN}{OA - PN}.$$

Utrumvis horum Canonum assumat Fermatius, habebit non modo quadratos infinitos, verum & possibiles omnes, tum integros, tum fractos, qui in datum numerum ducti (sive quadra-

tum

tum sive non-quadratum, neque enim est cur quæstionem sic expositam ad solos non-quadratos determinet) adscita unitate conficient quadratum. Quod ipsum & a nobis antehac demonstratum est; ad hunc modum. Esto quadratus ille possibilis quicunq; (rem imperatam præstans) F^2. erit itaque ex hypothesi, NF^2+1 numerus quadratus. Esto L^2. Et sumatur $\sqrt{Q} = R = \frac{L\mp 1}{F}$ erit inquam (juxta priorem Canonem) $\frac{4Q}{D^2} = F^2$.

Etenim $Q = R^2 = \frac{L^2 \mp 2L + 1}{F^2}$. Sed & $NF^2+1 = L^2$, adeoque $L^2 - 1 = NF^2$, & $\frac{L^2-1}{F^2} = N$. Et propterea D ($= Q \sim N$) $= \frac{L^2 \mp 2L + 1}{F^2} \sim \frac{L^2-1}{F^2} = \frac{2L\mp 2}{F^2}$ Adeoque (quia $2R = \frac{2L\mp 2}{F}$ erit $\frac{2L\mp 2}{F^2}$) $\frac{2L\mp 2}{F}$ ($F = \frac{2R}{D}$; hoc est $\frac{4Q}{D^2} = F^2$. quod erat demonstrandum. Atque idipsum, si opus sit, de altero etiam Canone ostendetur.

Ostendimus itaque Canonem Generalem, qui petebatur; qui nempe Dato quovis numero, quadratos exhibeat numero infinitos, qui in datum numerum ducti, adscita unitate conficiant quadratum. Nec est cur non soluti Problematis postulemur.

Ostendebam etiam, ex abundanti, idipsum eadem facilitate præstari, si pro *adscita unitate* dixisset, *adscito quovis numero quadrato*, puta Bq. Nempe pro $\frac{4Q}{D^2}$, respondendum esset $\frac{4Q}{D^2}B^2$. Sed hoc πάρεργον, quippe illud solummodo petebatur quod exhibuit primus Canon; qui jam statim post acceptam quæstionem Parisios mittebatur, eodem (ni fallor) Mense Martio. Adeo ut neq; non soluti Problematis, neq; etiam moræ, simus postulandi.

Verum quidem est, jam tandem Mense Octobri, allatas esse ad me literas, quas ad D. Vestram scripserat Fermatius; quibus

bus partim innuebat, se D. Vicecomitis mentem haud satis assequuntum, (eo quod solutiones idiomate Anglicano scriptas, quippe ad D. White virum Ang um, parum intellexerit, nec adesset harum rerum gnarus qui fideliter exponat;) partim quod quæstiones propositas de solis numeris integris intellectas vellet: (quod erat quæstionis statum plane immutare; quippe de *Integris* antea ne γρῦ quidem;) partim etiam alia proposuit multa, ab hoc negotio plane aliena, quibus pariter respondendum erat, quod & factum est. Eram autem & tum temporis partim aliis detentus negotiis, partim etiam peregre abiturus, nec ante reditum Mense Novembri factum vacabat huic me accingere negotio: eodem itaque mense tum ad hæc, tum ad alia, fuse respondimus, (literis ad te datis Novemb. 21.) tum meo, tum & Honoratissimi Vicecomitis nomine: Et quidem si tantillum illud moræ, & necessariæ quidem, indulgeat, non est & adhuc cujus incusemur.

At interim, si vir Cl. idioma nostrum minus intellexerit, non & ideo problema minus est solutum. Nec magis culpandus erat Honoratissimus Vicecomes, quod Anglice scripserit ad Virum Anglum, quam Vir Clarissimus quod ipsius fere omnia etiam ad nos Gallice sint allata.

Quod autem de quadratis Integris jam tandem illud exponat, quod de Quadratis simpliciter fuerat propositum: Id nobis neutiquam est imputandum. Neque enim erat unde hariolemur sic intelligendum: præsertim cum & Diophantum in hisce se imita um dixerit, apud quem per numeros quadratos nusquam non promiscue tum integri tum fracti intelliguntur.

Sed esto, De numeris integris intelligantur. Dicimus & sic solutas esse quæstiones. Ad primam utique & secundam, exhibuimus 1, numerum integrum, qui utriq; satisfaciat. Ad tertiam vero, Canonem qui petebatur exhibuimus Generalem qui tum Integros tum & Fractos omnes exhibeat quadratos negotio accommodos.

Ubi autem solos integros se voluisse dicat Fermatius, eosque infinitos, (quanquam ego illud prius nescíverim nec quidem suspicabar,) quo illi etiam hac ex parte satis factum sit jam ultimis literis Novembri datis ostensum est.

Ostendimus nempe, propositionē sic intellectam minus vniversalē esse,

esse, quam ut prius erat proposita: & saltem ad numeros non-quadratos (quod & fecit Fermatius) restringendum esse. Si enim tum N, tum $\frac{4Q}{D^2}$ sit numerus quadratus integer, erit & $\frac{4QN}{D^2}$ integer quadratus, qui itaq; ab alio quadrato integro non poterit unitate sola differre.

Ostendimus item, quo casu unus aliquis quadratus exhiberi possit rem imperatam præstans, eodem & infinitos exhiberi posse; &, quo pacto ex uno cognito alii innotescant infiniti, itidem indicavimus. Quod vel ipsi D. Freniclo non ingratum fore credo; ut qui hoc totum negotium (utut in problemate præcipuum videatur) penitus omisit; neque enim de infinitis exhibendis quicquam habet vel Theorematice demonstratum, vel Problematice constructum; quorum nos utrumque præstitimus.

Ostendimus item quo pacto, ex infinitis quos exhibent quadratos expositi Canones nostri, integros a fractis secernamus. Nempe quoties $\frac{4Q}{D^2}$ est numerus integer; hoc est, quoties D^2 est aliquota pars numeri $4Q$; adeoque (sumptis radicibus) D, vel $Q \sim N$, aliquota pars numeri $2R$: vel (substituendo pro Q, $\frac{s^2}{r^2}$, adeoque $R = \frac{s}{r}$; quia scilicet fieri potest ut Q & R sint numeri fracti) $n \sim \frac{s^2}{r^2}$ aliquota pars numeri $\frac{2s}{r}$; hoc est (ductis utrisque in r^2) differentia $nr^2 \sim s^2$ aliquota pars dupli rectanguli $2sr$. quoties, inquam, hoc contingit; quadratus quam exhibet expositus canon, est numerus integer; cujus radix $\frac{2sr}{nr^2 \sim s^2}$. Hoc autē, ut alias sæpe, ita semper contingit ubi $nr^2 \sim s^2$ (differentia facti ex numero dato, in quemvis quadratū ducto, ab alio aliquo quadrato) est vel 1, vel 2. Ut enim 1 dividit quemvis integrum ita, & 2 saltem quemvis parem, adeoque & $2rs$. Quæ quidem una regula, summam continet eorum omnium quæ de hoc negotio D. Freniclus tradidit. Est utique numerus in ipsius Tabellæ columna quarta, numerus r, utpote cujus quadratus in

numerum

numerum *n* ductus ab alio aliquo quadrato, (puta s^2) unitate vel binario differat, five excessu five defectu, vel saltem aliquota parte numeri 2 *rs*; Et invenire suum columnæ quartæ numerum; idem est atque invenire nostrum *r*. (quod interim ille, quo pacto fiat, nusquam docet; adeoque rem totam Insolutam relinquit: exempla tantum exhibendo in singulis numeris non quadratis ad usque 150, regulam autem, qua dato quovis numero perficiatur, neutiquam exhibendo, quam exigebat problema.) Quæ autē deinceps decem continuis paginis præcepta traduntur, unde numerum columnæ quartæ reperiatur quæsitus columnæ secundæ numerus: Nos uno hoc præcepto simul & semel tradimus;

nempe $\frac{2rs}{nr^2 \sim s^2r}$ esse numerum quæsitum; cujus scilicet quadratus rem imp catam efficiat.

Quod autem ille speciatim compendium tradit de numeris pariter paribus, hoc est, per 4 divisibilibus, (ubi numeros quartæ columnæ in auxilium non advocat,) id nos universaliter ostendimus, non tantum de numeris per 4 divisibilibus, sed & per quemvis quadratum.

Quæ quidem omnia, aliaque horsum spectantia, jam fusius antehac exposui, tum in nuperis meis ad D m. V. mense Novembri scriptis, tum in iis quas paulò post (sed priusquam D. Fernicli tractatum videram) scribebam ad D. Vicecomitem Brounker*, quarum etiam exemplar cum his accipies.

*Epist, XVII Quæ autem jam dicta sunt, non eò dicta velim existimes, ut Clarissimis Nobilissimisque Dominis, Fermatio, et Ferniclo, quicquam derogatum eam, vel eorum extenuatum labores, aut in hisce rebus peritiam, (quos summos viros, uti par est, veneror,) sed ut videas de Anglis etiam tuis non esse cur erubescas. Quid autem hac ex parte præstitimus, vel Honoratissimus Vicecomes, qui potiores hac in re partes sustinet, vel & ego, ipsi succenturiatus, Dom. Væ, dijudicandum permitto. Ut qui sum

Oxoniæ, Decem. 26. 1657.

Dnis. Væ. Observantissimus,

Johannes Wallis.

EPIST. XIX.

D. *Joh. Wallis* ad D. Vicecomitem *Brouncker*.

EN hic habes, vir Illustrissime, de posteriori Inductionis instituendæ methodo * (quam paulo fusius quam antehac fecimus explicandam esse visum est) sensa nostra. Quæ quamvis Tibi breviter antehac indicata, sis ipse satis assecutus (ut cui verbum sat erat;) cum tamen video rem ipsam aliorum item oculis subjiciendam, quibus eadem minus esse possint familiaria, operæ pretium esse judico (præsertim cum & tu idem exigere videaris) explicatius eadem aliquanto aperire.

* Vide Append. Epist. XVII.

Retento itaque, quod prius exposuimus, exemplo; Nempe, dato numero non-quadrato $n = 13$, qui in quadratum a^2 ducendus, unitate deficiat à quadrato; quadratum illud a^2 invenire. Quoniam ex hypothesi $13a^2 + 1$ est numerus quadratus integer, (jamdiu enim est quod problema fuerit de Integris expositum;) certum est quadratum illum minorem esse debere quam $Q4a^2$, $= 16a^2$; majorem tamen quam $Q3a; = 9a^2$. (quippe posito a numero integro, certum est $16a^2 \succ 13a^2 + 1 \succ 9a^2$.) Esto itaq; vel $Q: 3a + b:$ vel $Q: 4a - b:$ (ut sit b differentia radicis quadrati quæsiti, à radice quadrati vel majoris vel minoris;) Quorũ cum utrumvis pro arbitrio poni possit, posuimus priorem; adeoq; $13a^2 + 1 = Q: 3a + b; = 9a^2 + 6ab + b^2$; & (ablatis utrinque æqualibus) $4a^2 + 1 = 6ab + b^2$.

His positis; manifestum porro est, quantitatem b minorem esse quam a, majorem vero quam $\frac{1}{2}a$. (hoc est $2b \succ a \succ b$.) Si enim esset $b = a$, fuisset $3a + b = 4a$, quem numerum esse justo majorem jam ostensum est; est itaque b minor quam a. Sin esset $b = \frac{1}{2}a$, adeoque $a = 2b$; esset (propter æquationem $4a^2 + 1 = 6ab + b^2$ modo expositam) $16b^2 + 1 = 12b^2 + b^2 = 13b^2$ quod esse nullo modo potest. Est itaque b major quam $\frac{1}{2}a$. Adeoque $2b \succ a \succ b$.

Eodem modo; cum sit $2b \succ a \succ b$; liberum erit statuere vel $a = 2b - c$, vel $a = b + c$, (ut sit c differentia numeri a, vel a $2b$ vel a b;) quorũ cum utrumvis pro arbitrio poni possit, posuimus $a = b + c$, adeoque (propter æquationem $4a^2 + 1 = 6ab + b^2$

 modo

modo expositam) erit $4b^2 + 8bc + 4c^2 + 1 = 6bb + 6bc + bb$, & (expunctis æqualibus) $2bc + 4c^2 + 1 = 3b^2$. Unde colligitur (ut prius) $2c \geqslant b \geqslant c$. Atque hinc porro (posito $b = c + d$) sequitur $2d \geqslant c \geqslant d$; & (posito $c = d + e$) erit $2e \geqslant d \geqslant e$; (prout in operationis exemplo prius exhibito videre est.) Unde cum (posito $d = e + f$) prodeat $e^2 + 1 = 6ef + 4f^2$; certum est & $7f \geqslant e \geqslant 6f$. Si enim e æquet $7f$, etiam $40f^2$ ($= 6ef + 4f^2$) æquaret $49f^2 + 1$ ($= e^2 + 1$:) *deficit autem*; sin $e = 6f$, etiam $40f^2$ ($= 6ef + 4f^2$) æquaret $36f^2 + 1$ ($= e^2 + 1$) atqui *superat*: Major itaque est e quam $6f$, et minor quam $7f$. Et similiter in aliis.

Nequis tamen existimet multis opus esse tentaminibus, ut istiusmodi limites detegantur, puta $7f$ & $6f$, intra quos constabit numerus e; adeoque tædium inde oboriturum submetuat : ut eo metu liberetur, notandum erit eorum alterum fere semper obtineri diviso numero qui rectangulo præfigitur, per numerum præfixum quadrato cujus limites quæruntur. Ut in præsenti exemplo ($e^2 + 1 = 6ef + 4f^2$) diviso 6 per 1, habetur quotiens 6; adeoque $6f$ est limitum alter; (vel saltem numerus ipsi quam proximus.) Et facto tentamine, ponendo $6f$ pro e, adeoq; $36f^2$ pro $6ef$; erit $6ef + 4f^2 = 40f^2$, qui numerus cum sit major quam $36f^2 + 1$ ($= e^2 + 1$,) patet $\frac{1}{6}e$ majorem esse quam f, sive $e \geqslant 6f$: quod autem sit $e < 7f$ similiter patet, quia posito $e = 7f$, erit $6ef + 4f^2 = 46f^2$, minor quam $49f^2 + 1 = e^2 + 1$. Unde limites innotescunt $7f \geqslant e \geqslant 6f$. Et sic alibi.

Jam vero cum manifestum sit, differentias b, c, d, &c. tum numeros integros esse, tum & continue decrescere : eo tandem perveniri necesse erit, ut subsequens aliqua differentia (saltem ubi ad 1 perveniatur) sit proxime præcedentis aliquota pars; (similiter atque obvenire notum est, in abbreviandis fractionibus, sive maximo communi divisore inveniendo, vi prop. 2. e. 7 Euclidis, divisores per residuos continue dividendo : quæ quidem inquisitio est huic admodum affinis.) Quod ubi contingit, pro limitibus ad instar $7f > e \geqslant 6f$, habebitur æqualitas. Sic, in præsenti exemplo, cum perventum est ad $4hj + 3j^2 + 1 = 3h^2$; sumpto $h = 2j$, (majorem enim fore quam $1j$, patet ex æquatione præcedente erit ($4hj + 3j^2 + 1 = 8j^2 + 3j^2 + 1 =$) $11j^2 + 1 =$ ($3h^2 =$) $12j^2$; quod cum fieri posse constet, posito $j = 1$; patet inde

valor

valor numeri j. Unde retrocedendo invenientur valores differentiarum h, g, f, e, d, c, b, & tandem ipsius $a = 180$, quæ radix est quadrati primitus quæsiti.

Atque hæc quidem ad processûs formam satis explicandam sufficiant.

Facile autem hinc est colligere Theorematis veritatem *Dato quovis numero non-quadrato*; nempe dari *aliquem quadratum* qui in eum ductus adscita unitate æquetur quadrato; adeoq; & *infinitos*, uti jam pridem demonstravimus *: Et quidem non modo *adscita unitate* (quod proponit Fermatius) sed & *adscito quovis numero quadrato*, (quod & jam antehac à nobis alias ostensum est.) Nam, verbi gratia, uti posito $13a^2 + 1$ æquali quadrato, provenit $11j^2 + 1 = 12j^2$ adeoque $j^2 = 1$: sic si à principio positum fuisset $13a^2 + 9$, provenisset $11j^2 + 9 = 12j^2$, adeoque $j^2 = 9$; (unde colligetur a^2 retrocedendo, ut prius;) & similiter quicunque alius quadratus loco 1, vel 9, adsciscere-tur.

* Vid. Epist. XVI.

At vero, *adscito numero quovis*, puta *non quadrato*, non erit universaliter verum. (Quod & jam pridem diximus, atque ostensu facile est.) quo autem casu res est possibilis, eodem plane modo innotescet; substituendo nempe pro 1, numerum illum quemcunque possibilem.

Sed & porro notandum erit, eodem plane modo procedendum esse, si pro *adscito quovis numero*, dicatur, *dempto quovis numero* (intellige *possibili*.) Nempe pro + 1, substituendo −1 (& similiter de quovis alio numero possibili.) Quod oppido notandum est ob ea quæ post tradentur.

Atque hactenus quidem satis aperuisse videamur quæ ad hoc negotium necessario spectent. Lubet tamen alia quædam adjicere quæ ad expeditionem faciunt.

Primò itaque, cum jam supra dictum sit, indifferenter pro arbitrio poni posse à principio, vel $13a^2 + 1 = Q: 4a - b: = 16a^2 - 8ab + b^2$; vel $13a^2 + 1 = Q; 3a + b: = 9a^2 + 6ab + b^2$: Quanquam illud omnino verum sit, expedit tamen eam positionem eligere quæ habeat b minorem. Adeoque in præsenti exemplo, quoniam certum est $13a^2 + 1$ propius accedere ad $16a^2$ quam ad $9a^2$, (quippe illic differentia est $4a^2 + 1$ hic autem $3a^2 - 1$,) commodius ponetur $13a^2 + 1 = 16a^2 - 6ab + b^2$.

 Similiter

$n = 13.$
$13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2$
$8ab - b^2 = 3a^2 - 1$
$3b \gtrdot a \gtrdot 2b$
$a = 2b + c$
$16b^2 + 8bc - b^2 = 12b^2 + 12bc + 3c^2 - 1$
$3b^2 + 1 = 4bc + 3c^2$
$2c \gtrdot b \gtrdot c$
$b = 2c - d$
$12c^2 - 12cd + 3d^2 + 1 = 8c^2 - 4cd + 3c^2$
$c^2 + 1 = 8cd - 3d^2$
$8d \gtrdot c \gtrdot 7d$
$c = 8d - e$
$64d^2 - 16de + e^2 + 1 = 64d^2 - 8de - 3d^2$
$3d^2 + 1 = 8de - e^2$
$3e \gtrdot d \gtrdot 2e$
$d = 2e + f$
$12e^2 + 12ef + 3f^2 + 1 = 16e^2 + 8ef - e^2$
$4ef + 3f^2 = 3e^2 - 1$
$e = 2f$
$f = 1$

Ergo $e = 2$
$d = 5$
$c = 38$
$b = 71$
$a = 180$

Similiter, cum postea dictum est, eo quod posito $13a^2 + 1 = 9a^2 + 6ab + b^2$, reperiatur a major quam b at minor quam $2b$, indifferenter poni posse, vel $a = 2b - c$, vel $a = b + c$; quanquam & illud omnino verum sit, expedit tamen eam eligere positionem qua differentia c minor evadat. Adeoq; quoniam hic patet a propius accedere ad b quam ad $2b$, commodius ponetur $a = b + c$ quam $a = 2b - c$. Quod & de reliquis item differentiis d, e, f, &c. pariter intelligendum erit.

Ratio est utrobiq; eadem; quippe cum id agatur ut differentiæ b, c, d, &c, continue decrescentes, tandem ad unitatem reducantur; id citius fiet sumptis ubique minoribus quam majoribus differentiis. (Quod quidem pariter obtineret in abbreviandis fractionibus, sive inveniendo maximo communi divisore, notâ methodo. quod satis quidem obvium erit advertenti, quamquam nesciam numquis illud soleat observare.)

Re sic institutâ, calculi compendium non contemnendum hinc haberi posse, exemplo adjecto patet: Ubi eodē quo prius numero $n = 13$ exposito, calculus tertiâ parte brevior est, quam supra, ubi

ubi differentiæ ſemper exceſſivæ ſumerentur. Quippe illic ad j, hic nonniſi ad $ſ$, continuatur calculus.

Ut autem videatur hanc methodum uſui eſſe,non modo ad minores vel mediocres tantum numeros, ſed & ad vaſtos ſatis exquirendos; id ipſum libuit experiri expoſito numero non-quadrato $n = 109$; (qui ex omnibus quos habet D. Frenicle, maximum quadratum poſtulat, quemque nec invenit ipſe, ſed à D. Fermat, ſibi tranſmiſſum fatetur:) Nempe ad hanc formam,

$$n = 109$$
$$109a^2 + 1 = 100a^2 + 20ab + b^2$$
$$9a^2 + 1 = 20ab + b^2$$
$$3b > a > 2b$$
$$a = 2b + c$$
$$36b^2 + 36bc + 9c^2 + 1 = 40b^2 + 20bc + b^2$$
$$16bc + 9c^2 = 5b^2 - 1$$
$$4c > b > 3c$$
$$b = 4c - d$$
$$64c^2 - 16cd + 9c^2 = 80c^2 - 40cd + 5d^2 - 1$$
$$24cd - 5d^2 = 7c^2 - 1$$
$$4d > c > 3d$$
$$c = 3d + e$$
&c.

Unde colligitur, $y = 1$

$$x = 2y = 2$$
$$v = 4x + y = 9$$
$$t = 3v - x = 25$$
$$ſ = 5t + v = 134$$
$$r = 7ſ - t = 913$$
$$q = 7r + ſ = 6525$$
$$p = 5q - r = 31712$$
$$o = 3p + q = 101661$$
$$n = 4o - p = 374932$$
$$m = 2n + o = 851525$$
$$l = 20m + n = 17405432$$
$$k = 2l + m = 35662389$$
$$i = 4k + l = 160054988$$

$$h = 3i - k = 444502575$$
$$g = 5h + i = 2382567863$$
$$f = 7g - h = 16233472466$$
$$e = 7f + g = 116016875125$$
$$d = 5e - f = 563850903159$$
$$c = 3d + e = 1807569584602$$
$$b = 4c - d = 6666427435249$$
$$a = 2b + c = 15140424455100.$$

Videmus itaque numerum a, radicem quadrati quæsiti, notis saltem 14 scriptum, adeoque & quadratum ipsum notis saltem 27 scribendum, (numerum satis vastum,) positionibus nonnisi 22 investigatum. Quam investigationem satis pro rei natura compendiosam esse vix erit qui diffitebitur.

Verum aliud adhuc superest compendium, quo non raro etiam hujus laboris pars saltem dimidia abscinditur. Ope scilicet regulæ jamdudum traditæ; nempe, *si differentia numeri expositi, in quadratum aliquem ducti, ab alio quovis quadrato, sit aliquota pars dupli rectanguli sub quadratorum illorum radicibus; quotiens divisione emergens, erit radix quadrati quæsiti.* Quod cum contingere necesse sit, quoties ea differentia est vel 1, vel 2; si quando reperiatur quadratus qui in datum non-quadratum ductus, vel alium quadratum unitate aut binario superet, vel etiam binario deficiet, exinde colligi quadratum quæsitum certum est. Hoc autem inter operandum, præsertim in longioribus numeris, ubi compendio maxime opus est, sæpissime occurret.

Exempli gratia, exposito (ut modo) $n = 13$. quia posito $13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2$, habetur æquatio, $3b^2 + 1 = 4bc + 3c^2$, adeoque $2c > b > c$; si ab innitio positum fuisset $13a^2 - 1$, prodiisset $3b^2 - 1 = 4bc + 3c^2$, adeoque $2c = b$; unde erit $c = 1$. $b = 2$. $a = 5$. cujus quadratus in 13 ductus unitate *superabit* quadratum numeri 18, adeoque 180 $(= 2 \times 5 \times 18)$ est verus numerus a quæsitus, cuius nempe quadratus in 13 ductus, unitate minor erit quadrato numeri 649.

Eodem modo; exposito $n = 109$, ubi operando ut supra (posito $109a^2 + 1 = 100a^2 + 20ab + b^2$) perveniatur ad $16kl + 5l^2 = 9k^2 - 1$, adeoque $3l > k > 2l$, manifestum si ab initio poneretur $109a^2 - 1$, prodituruma fuisse $16kl + 5l^2 = 9k^2 + 1$,

adeoque

adeoque $k=2l$, unde habetur $l=1$, & (retrocedendo) $a=581525$, cujus nempe quadratus in 13 ductus unitate *superet* quadratum, unde tandem, dicto modo, colligetur quæsitus $a=15140424455100$ cujus quadratus in 13 ductus unitate a quadrato *deficiet*. Adeoq; qui ad j prius processerat calculus poterit ad l terminari.

Sic exposito numero non-quadrato 433; posito $433a^2+1=441a^2-42ab+b^2$, operatione ut præscribitur peractâ prodibit æquatio $8O^2+1=38Op+9p^2$ adeoque $5p \geq O \geq 4p$; Ergo, si posuissem ab initio $433a^2-1$, prodiisset $8O^2-1=38Op+9p^2$, adeoq; $5p=O$. & propterea $p=1$, $O=5$. &c unde prodiret $a=347483377$, cujus nempe quadratus 120744697291324129 in 433 ductus exhiberet 52282453927143347857, qui unitate *superat* quadratum numeri 7230660684. Adeoq; 5025068784834899736 (duplum rectanguli sub radicibus 347483377 & 7230660684) est numerus a primitus quæsitus: nempe cujus quadratus 25251316292322095858983939617172869696 in 433 ductus, exhibebit 10933819954575467506940045854235852578368, qui unitate deficit a quadrato numeri 104564907854286695713. Quæsitus itaque quadratus locorum saltem 38, (numerus satis ingens,) post 15 positiones detegitur, operatione scilicet non nisi ad p continuato.

$p=1$
$5p=o=5$
$4o+p=n=21$
$2n+o=m=47$
$3m+n=l=162$
$4l-m=k=601$
$13k+l=j=7975$
$2j+k=h=16551$
$3h-j=g=41678$
$14g-h=f=566941$
$4f+g=e=2309442$
$3e-f=d=6361385$
$2d+e=c=15032212$
$4c+d=b=66490233$
$5b+c=a=347483377$.

Atque hic quidem fixissem pedem; nisi quod unum adhuc aut alterum, mantissæ loco, notandum restet; non quidem tanquam huic negotio necessarium, sed notatu forsan non injucundum.

Et primo quidem, quanquam (ut modo dictum est) compendium jam proxime traditum de inveniendo a, sive a succenturiato, (cujus nempe quadratus in n ductus, unitate quadratum superet,) ejusque ope, a vero, (cujus quadratus in n ductus, unitate

tate

tate a quadrato deficiat,) omnino verum sit, usuiq; accommodum: si tamen illud placeat negligere, adeoq; opus inceptum eousq; continuare donec prodeat a verum; id facile obtinebitur (sine operoso calculo) propter easdem eodem ordine recurrentes æquationes. Exempli gratia. In numero pridem exposito $n = 109$ ubi inventis æquationibus quæ conveniunt ipsis a, b, c, d, &c, usq; ad m, (ubi habetur $851525 = a$, sive a succedaneū,) eædē ipsæ æquationes occurrunt pro m, n, o, p, &c. quæ prius pro a, b, c, d, &c; (si saltem excipias x & y duas ultimas in quibus sistetur; quas ipsas etiam, nisi illic sistere placuerit, æquationes, ipsis k & l conformes esse oportebit.) Poterit itaq; calculus, a principio institutus, ad eas æquationes inveniendas, statim sistere, quum primum ad ipsum l vel m, (unde scilicet a, sive a succenturiatum, colligitur,) perveniatur. Et qui hoc auxilium placuerit adhibere, poterit ille sine magno dispendio etiam compendium jam proxime traditum negligere.

Alterum, quod item notatum velim, hoc est; Nempe, uti hactenus tradidimus formam investigandi quadrati primi radicem cujus ope quadratorum deinceps omnium in infinitum radices, juxta seriem jamdudum traditam, facillimo negotio exhibeantur: Si tamen & seriem illam negligere placuerit, poterunt & reliquorum illorum quadratorum radices eadem arte (sed longiori parum opere) obtineri, qua & illa prima, continuato scilicet opere inchoato donec ad quadrati secundi, tertii, quarti, &c. radicem perveniatur. Sic, verbi gratia, Exposito ut supra, $n = 13$. Ubi perveniatur ad æquationem hanc, $4cf + 3f^2 = 3c^2 - 1$, collegimus superius, poni posse $c = 2f$; nempe si ponatur $f = 1$; (unde & retrocedendo reliquorum valores investigavimus, adeoq; & ipsius a, quæ radix est quadrati primi.) At vero si ponamus $f \gtrsim 1$, erit $c \gtrsim 2f$; adeoq; posito $c = 2f + g$, procedendum erit donec similis recurret iterum æquatio; quod fiet ubi ad l, m, perveniatur,

$N = 13$ $s = 1$

$r = 2$

$q = 2r + s = 5.\ a$

$p = 8q - r = 38$

$o = 2p - q = 71$

$n = 2o + p = 180.\ A$

$m = 8n - o = 1369$

$l = 2m - n = 2558$

$k = 2l + m = 6485.\ \beta$

$j = 8k - l = 49322$

$h = 2j - k = 92159$

$g = 2h - j = 233640.\ B$

itur; nempe $4lm + 3m^2 = 3l^2 - 1$, ubi posito $m = 1$, erit $l = 2m = 2$ unde (retrocedendo) habebitur $a = 233640$ radix quadrati secundi. Sin adhuc ponamus, non $m = 1$, sed $m > 1$, erit $l > 2m$; adeoq; posito $l = 2m + n$ procedendum erit donec recurrat similis æquatio, puta $4rs + 3s^2 = 3r^2 - 1$; unde, posito $s = 1$, erit $r = 2$, & $a = 303264540$. Sin ponamus $s > 1$, procedendum ut prius, ad radicem quarti, & deinceps quinti, &c. ad libitum.

$f = 8g - h = 1776961$
$e = 2f - g = 3320282$
$d = 2e + f = 8417525.\ \gamma$
$c = 8d - e = 64019918$
$b = 2c - d = 119622311$
$a = 2b + c = 303264540.\ C$
&c &c.

Verum & hic, ut prius, ubi ad a primum perveniatur, levabitur calculus ob æquationes similes subinde recurrentes. Ut in apposito exemplo liquet; ubi habentur tum omnes a veri (quos jam appello A, B, C, &c) tum & omnes α sive a succedanei, (quos notis α, β, γ, &c designo) puta, quorum quadrati in datum non quadratum ducti, unitate vel a quadrato deficiunt, vel quadratum superant. Si enim, verbi gratia, ubi jam est $s = 1$; ponatur $f = 1$; ubi nunc est n, habebitur a radix prima. Sin loco $s = 1$ ponatur $m = 1$; ubi nunc erit est g, habebitur $a = B$ radix $a =$ quadrati secundi. Uti jam habetur $a = C$ radix quadrati tertij. Et quidem, continuata similium æquationum repetitione, habebimus D, E, F, &c. quousque libet, quod &, mutatis mutandis de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. intelligendum erit.

Ubi interim advertere licet, sicut ex cognito α, per regulam superius traditam, prodibit A; (quia scilicet $13 \times 5 \times 5, \sim 18 \times 18, = 1$; adeoq; $2 \times 5 \times 18 = 180 = A$;) sic ex cognito A, prodibit B; ex β, C; ex B, D; ex γ, E; ex C, F: &c. Atq; huic simile sæpissime continget, cum levi tamen non nunquam discrimine. Exempli gratia. Exposito non quadrato 21; adeoq; $21a^2 + 1, = 25a^2 - 10ab + b^2$. vel $= 16a^2 + 8ab + b^2$; prodibunt illic numeri, 1, 2, 5, 12, vel etiam 1, 2, 3, 5, 12; hic vero 1, 2, 7, 12, vel 1, 2, 5, 7, 12, vel etiam 1, 2, 3, 5, 7, 12; (prout aliis aliisq; modis differentias additivas vel ablativas velmistim sumamus;) prodibit autem utcumq; $a = 12$ radix prima; reliquæq; deinceps opere continuato innotescent ut prius. Ubi notandum erit non modo numerorum A, B, C, &c, quadratos, in datum 21 ductos unitate

d'estre destrompe par cet ingenieux & sçavant Sigeneur; erit cur & ipse tibi gratuletur. Me quod attinet, humillimas est quod rependam gratias, quod in Victoriæ tuæ partem advocare dignatus es,

Insignissime Domine,

Oxonij, Jan 20.
1657.
stylo Angliæ

Humillimum tuum, Tibiq; obsequentissimum servum,

Johannem Wallis.

EPISTOLA XX

D. *Vice-Comitis* Brouncker *ad D.* Joh. Wallis.

Sir

I received yesterday a *Letter* from Sr *Kenelm* Digby, with these inclosed. In mine was only complements, and a reference to these. I am not displeased to see, that at last the desire Mons. *Frenicle* evidently hath to oppose us in all he can, produceth onely such triviall objections as are to be found in in these contained. * Only I am sorry his passion should mislead him into such uncivill expressions. His Arguments are so in- Ep.XXII. considerable, that they hardly deserve any reply: His cavil at your solution by the number 1, is very weake; For that 1 is not a number in the opinion of some, every one knows; but they all doe know as well, that it is a number in the opinion of others. And that both Mr. *Fermat* (who proposed the *Probleme*) and Mr. *Frenicle* (who now makes this objection) have taken it for such, is evident from their papers. That it was such a solution as the Proposer expected, none can suppose; nor was it given as such; but rather to shew how easily it might be solved as it was worded; & that it ought to have been otherwise expressed, or that exception made. His cavil at mine, proceeds from his not minding the sense thereof, which you did so fully expresse, that otherwise he could have no ground for what he objects, the aliquote parts being restrained to the actuall parts

and no others. That 1 doth not in every respect agree with the instance 343, is very true, (nor was that required in the probleme:) But it is as true, that none of his solutions do so too: For, as the Cube 1 hath no aliquote parts, so are none of his numbers prime Cubes; as is the instance given 343, the cube of 7 a prime number. Severall of my friends, in whose company I now am, will not permit me to say more, but that I am,

Sir,

Your most faithfull friend & servant

Febr. 18. 165$\frac{1}{1}$.

BROUNCKER.

EPISTOLA XXI.

D. Kenelmi Digby *ad D.* Joh. Wallis. *praecedenti inclusa, una cum subsequente.*

Worthy Sir,

I may seeme to be one of those debtors that are runne so farre in arreare as they can never hope to satisfie their Creditors, nor have confidence to appeare before them. For it is now neere 4 Months since I received your most obliging letter of the 4 of *Septemb.* last, *stilo vet.* I could make you an excuse, (and a true one,) that much of this time I have been out of towne; and so cast my silence upon that cause. But that were not a justifiable excuse: for, no tumult of removing, nor trouble of jorneying, ought to be allowed, for a sufficient cause to retard the 20. part of this time my humble, and due acknowledging your excessive favour and unlimited civilities in this Noble and generous letter of yours. My wisest course then, as well as the most candid is to have recourse unto plain and down-right truth: which will never faile of bearing out her friend, as long as his intentions are sincere and respectfull,

this

This plea she maketh unto you in my behalfe. Your obligeing expressions in your letter were so beyond all proportion or possibilitie of merit in me, that I judged bare and dry thanks, too meane a returne for so high a favour. I was desirous to draw in an other into the account with me, that might offer something to you so acceptable as might make my letter the welcomer that should usher it in. And accordingly I sent unto Mounf. *Fermat* your ingenious and noble Theorme about the segment of a Pyramid or Cone; entreating him to send me the demonstration of it, that I might transmit it to you. And thereuppon, till I should have his answer, I deferred writing to you; for I expected he would send it me within a returne or two of the post. But ever since, from time to time, I have had nothing from him but excuses, and still remitting me to the next, and the next. It is true it came to him upon the nicke of his removing his seate of judicature from Gastres to Tholose; where he is supreme judge in the soveraigne Court of Parliament. And since that, he hath been taken up with some Capitall causes of great importance; in which in the end he hath given a famous and much applauded sentence for the burning of a Priest that had abused his function; which is but newly finished; and execution done accordingly. But this which might be an excuse to many other, is none to Mounf. *Fermat*, who is incredibly quicke and smart in any thing he taketh in hand. Therefore his not giving the demonstration of your Theorme all this while, (nor any other answere, but much commending and applauding it, every time I have written to him about it) is an evidence now at the last, that I must expect none from him: And therefore must not hope to have my thirst satisfied in this particular by any other then by your worthy selfe: for which end, when I shall have the happinesse of waiting upon you at Oxford, I will humbly beg the demonstration of you. And certainly, as soone as I shall returne into England (which I hope will not be long first) one of the first journeys I intend to make, shall be to that famous dwelling of the Muses and profoundest sciences, that I may there witnesse to you in presence the great value and deep respect I have for you; and receive then also the favour

of

of being introduced by you to salute your worthy Noble Colleagues and friends Dr. *Wilkins* and Dr. *Ward*; whom I exceedingly honour.

As *I* was thus in despaire of receiving what *I* hoped from Mr. *Fermat*; & therfore resolved to break my silence and humbly crave your pardon for it, upon telling you the true cause of it: *I* receive a new fav our from you, by your most obliging letter of the 21 of November last, which hath had a very slow passage to me: occasioned (as *I* understand) first, by my Lord *Brounckers* absence from London; and then, by Mr. *Whites*; for it arrived hither but by the last Post. M. *Frenicle* was at dinner with me when it was brought me: after which some necessary businesse called me presently abroad for some houres: during which (after having cursorily runne it over by my selfe) *I* left it with him to peruse. When *I* returned home, *I* found he had hastily written in my Chamber (where *I* left him) some reflections upon the first part of your letter, in forme of one to me, reserving to send or bring me his considerations upon the latter part of it, that day sevennight: for he was to goe out of towne the next morning for 4 or 5 days. *I* have long debated with my selfe whether *I* should send it you or no: he expressing therein so different a sense from yours. Yet in the end two reasons have convinced me that it is best to send it you: The one, because he desiring me earnestly to do so; if I should not; and you thereby not knowing what to reply to him; he might mis-judge your silence to him and please himselfe with the beleife of an advantage, that I doubt not but you will soon perswade him the contrary of. The other is, that the variety of sentiments between great and learned men, is no small promotion of learning, by giving occasion to display deep and abstruse verities. I therfore caused my secretary to coppy out his letter to me (for, it was so hastily scribled in a French hand, that you would never have bin able to read it) and here-enclosed *I* send it you: as also I will do his next, as soone as *I* receive it from him.

After so long importuning you at this time, I were too blame, if *I* further prolonged your trouble, by making an apology to you for doing so. The best amends I can now make, is not to

to persist in doing amisse. I here then cut of the thread, by signing my selfe, as I truly am

Noble and worthy Sir,

Paris, 6 Febr. 1658. St. Nov.

Your most humble and most affectionate servant and honorer

KENELME DIGBY.

EPISTOLA XXII.

D. de Fernicle, ad D. Kenelmum Digby, *praecedenti inclusa.*

Mirandum sane mihi videtur, vir Illustrissime, quonam pacto periti alioquin Mathematici tantũ hallucinati sint in responsione ad duo problemata numerica Clarissimi viri D. Fermat, circa cubos & quadratos omnibus suis partibus aliquotis addendos, ut unitatem iterum & tertio producere ad illa solvenda non dubitarint, ut videre est in Epistola clarissimi VVallisii Oxonii data 21 Novembris quam mihi ex tua benignitate per Illustrandam tradidisti. Quis enim vel vulgaris Arithmeticus, aut potius ex novissimis tironibus hanc solutionem tradere non erubesceret? Quamvis etiam unitas quaestionem perfecte solveret, cum haec omnes numerorum gradus & figuras in se contineat, ita ut quanquam non sit numerus, omnes tamen numeros, quodammodo referat; sed ne ipsa quidem unitas, his quae requiruntur satisfacere valet. Haec sunt Problemata.

1. Invenire cubum qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum. Exempli gratia numerus 343. est cubus à latere 7. omnes ipsius partes aliquotae sunt 1. 7. 49. quae adjunctae 343. conficiunt numerum 400. qui est quadratus à latere 20. Quaeritur alius cubus numerus ejusdem naturae.

2. Quaeritur etiam numerus quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Cubum.

Quaeritur

autem in eiſdem numeris fractis etiam numerum quadratum qui junctus ſuis partibus faciat cubum non expoſuerit: certe nulla alia eſt cauſa niſi quia D. Fermat talem quadratum pro exemplo ut in cubo non præbuit. Jam vero cum habeat in opuſculo Latine conſcripto, & tibi Vir Nobiliſsime dedicato, quadratum quæſtioni ſatisfaciens, facile illi erit applicando quadrato Cubos huic quadrato alios quotquot voluerit eadem via producere.

Sed neque mihi arridet cauſa cur plures non dederit Cubos: quia, inquit, non plures poſtulat Fermatius; ut etiam quod ſua indagatione problema indignum cenſeat; & certe hanc poſtremam ipſius excuſationem admittendam eſſe non contradicerem, ſi huic quæſtioni non invigilaſſet, & illam neglexiſſe ſimulaſſet: degunt in hac civitate præſtantiſsimi Mathematici, qui etſi nominatim ad eadem problemata ſolvenda à D. Fermat fuerint provocati, ſilere tamen maluerunt, quam incongruum quid erogare. (Solus Frenicles eadem aggreſſus eſt, & ſolutione potitus; quiſque ſuo dono peculiari inſignitur: hæc ille; alii aliis; libere effatum illud fatendum eſt, non omnia poſſumus omnes.) hoc vero ſilentium nihil eorum famæ detrimenti attulit. Sed quia D. Walliſius unitatem repetitis vicibus pro cubo quæſito profert; & ideo cæteros inquirere negligat, quod Fermatius plures non requirat: certe nullus datur huic excuſationi locus, cum nullum plane cubum tradiderit, quando unitatem obtulit: facile igitur eſt illud deſpicere, ad quod non poſſumus pervenire. Nec etiam multum convenit Matheſeωn Profeſſori, conqueri cui bono ſint hæc problemata; nobis forſitan qui has diſciplinas non profitemur, ſed in illis animi tantum gratiâ exercemur hoc dictum condonari poſſet.

Eodem vero jure quæreretur ab eo, cui bono, cui utilitati in inveſtiganda perperã circuli quadratura tanto tempore inſudarit, vel etiam in contexenda ſua Infinitorum Arithmetica; nequaquam enim Mechanicis uſibus hæc omnia inſervire poſſunt: Sed cui bono tota pene Geometria, & Arithmetica, ſi paucula quædam, & ea magis trita, & à peritis deſpecta, quibus Geodetæ, agrimenſores, mercatores, & qui utramque Architecturam exercent, aliique complures in ſuis calculis utuntur, excipias; cætera namque magis recondita, & præſtantiora nonniſi ad

ſcientiæ ſubtilitatem, & perfectionem ſpectant.

Cum autem ſit proprium intellectus humani veritatem inquirere; nec aliam ob cauſam tot viri præſtantes ſcientijs acquirendis operam dederint: inutilis certe dici nõn debet in diſciplinis alicujus acquiſitio veritatis.

Ulterius progrediendo, video ab ipſo propoſitum eſſe problema ſatis elegans: exquirit nempe quadratos numeros qui juncti cunctis partibus ſuis aliquotis conficiant eandem ſummam, uti ſunt 16. & 25. quorum quilibet junctus ſuis partibus facit 31. Sed quia videtur hoc quod illi primum fuit obviam & quaſi fortuito poſtulare, non ſecus ac ſi ipſum D. Fermat ſimiliter egiſſe putaret in ſuis problematibus proponendis; quæro ab ipſo VVallîſio an habeat tales quadratos, vel ſaltem an certo ſciat & demonſtrative, ſi tales alii quadrati inter ſe primi, vel ſi nulli præter 16.&25. in totâ numerorũ multitudine reperiantur; & poſtea reſponſum accipiet; non enim debet ignorare, an quæ proponit ſint impoſsibilia nécne: nec eſt Mathematici, leviter, & abſque matura inſpectione quæ primò ipſi ut occurrunt proponere; niſi forſitan inſtructionis ſuæ gratia, & de eis quæ fruſtra indagaverit, perquirat.

Cæterum ſi haud proſpere ab ipſo actum eſt in his prioribus, reliqua fœliciorem non conſequantur eventum, imo etiam in pejus ruunt, dum pro ſolutione multiplices quoſdam numeros tradit, quod quidem nihil aliud eſt quam numerum in 2. vel 3. vel alium numerum ducere, & in hoc vires ſuas exercuiſſe & ſufficienter probaſſe jactitat, id & alia pleraque abſona mihi facillimum foret palam facere: ſed nunc ſingula ſigillatim diſcutere non vacat; attamen adeo me benevolentia, & beneficiis devinctum tenes, ut nihil laboris ſubterfugere ad tua mandata exequenda, nec deſiderio tuo aliquid denegare poſsim, & me ſemper ad tibi obtemperandum paratiſsimum invenies. Vale.

Pariſiis 3. *Febr.*
1658.

EPIST. XXIII.

D. *Joh. Wallis* ad D. *Kenelmum Digby*

Illustrissime Domine,

Tuas Parisiis Febr. 6. *st. n.* datas, Febr. 19. *st. vet.* decubiturus accepi, quas pridie Londini acceptas ad me transmiserat Honoratissimus Vicecomes *Brouncker*, una cum inclusis D. *Frenicli* ad te literas: quibus postridie paraveram responsum; sed cujus missionem hactenus distuli, eo quod aliarum septimana sequente mittendarum spem feceras, (quas nondum accepimus,) quibus simul responderi posse putaveram; idq; eo potius quod meæ *Dec.* 26, aliæq; paulo citius a D. Vicecomite *Brouncker* ad Te missæ, nondum (uti videtur) ad te pervenissent cum illæ tuæ scriptæ fuerant. Non possum autem non humillimas ob immensum quo me favore prosequeris immerentem gratias reponere; sed & gratulari nobis & Oxonio nostro, quod spem feceris Te nos mœrentes præsentia tua refocillaturum brevi, qui doctissimum *La gbanium*, & tibi charissimum, jam deflemus, vix reparabile damnum; pleuritidis morbo *Febr.* 9. vivis ereptum. Tantillum temporis est quo *Armachanum*, *Seldenum*, *Langbanium*, tres incomparabiles viros, magno literarum damno ereptos, Anglia defleverit.

Ad inclusas tuis Nobilissimi *Frenicli* literas, hæreo quid dicam. Si enim conviciis agendum sit, tacere malim quam serram reciprocare.

Quod Numerus 1 partes aliquotas non habeat, nec novum est, nec ego id nesciveram.

Quod autem 1, Cubus non sit, quod non sit Numerus; quamquam ab alio forsan id dici posse putassem, non tamen putaverim a *Freniclo* dicendum; qui eundem ipse ut Numerum exhibuerat, & quidem Cubum. Exhibuit utiq; (nisi me fama fallit) ad aliud *Fermatij* problema, 1 & 1728 ut *duos Cubos numeros, duobus aliis numeris Cubis* 1000 & 729 *æquales*. Eundem in libro edito (quem favore tuo me nuper accepisse gratus agnosco) pag. 8. *Numerum* appellat, (*Exponantur*, inquit, *duo Numeri* 1 & 7, de hac ipsa quæstione verba faciens:) & quidem *Quadratum*, pag.

17 (verbis *Fermatij*, in ipsa posterioris quæstionis ἐκθέσει,) *Quadratus* 1 *ductus in* 3, *adscita unitate, facit* 4. Quod & verbis suis confirmat *Freniclus*, pag. 21. sub finem, id ipsum asserentibus. Iterumq; pag. 23. *productum*, inquit, *ex* 5 *in quadratum* 1. Sic pag. 25, lin. 19. *Numerus* 7 *in quadratum* 1 *ductus*. Et lin. 23. *minor numerus erit quadratus nempe* 9, & *major erit* 11 *in quadratum* 1 *ductus*. Et passim alibi. Cur vero, si Quadratum esse fateatur, neget & Cubum esse; vel etiam, si Clarissimis DD. *Fermatio* & *Freniclo* tum Numerus sit, tum nunc Quadratus, nunc Cubus, nobis interim non sit; non video.

Esto itaq; simus, sive ego, sive & Honoratissimus Vicecomes, non nisi *Vulgares Arithmetici*, vel etiam *ex novissimis Tyronibus*; at quid *mirandum* sit, quid *erubescendum*, quid Clariss. virum vel *stupore afficiat*, aut *rubore*, nos plane non assequimur. Propositum utiq; fuerat *Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum*. Est, inquam, 1, Cubus, (Freniclo saltem habendus est pro Cubo) idemq; additus suis partibus aliquotis (quippe nullis) manet adhuc 1; qui & Quadratus est. Quæritur item *Quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Cubum*. Est, inquam, idem 1, Quadratus, (Fermatio saltem & *Freniclo* quadratus erit, quippe quod uterq; sæpiu affirmavit,) idemq; additus omnibus suis partibus aliquotis (quippe nullis) manet adhuc 1, qui Cubus est. Quid itaq; vereamur non modo *iterum & tertio*, verum item quarto & quinto si opus sit, affirmare; *Unum eundemq; numerum* 1, *utrinq; quæsito satisfacere*.

Quid autem Clarissimo Viro bilem moveret, (ne compellato quidem, nedum lacessito, & quicum, ubi literas quas carpit scripseram, mihi nihil quicquam intercesserat negotij; neq; ipsius libellum vel videram quidem aut de eo quicquam inaudiveram, tantum abest ut quoquo modo læserim,) plane nescio. Non enim si alium aliquem numerum expectaverit vel ipse, vel & *Fermatius*, (quod nullus dubito,) vel etiam ipse (quod tum nesciveram) alios dederit, igitur & ægre ferrent hunc ipsis ex insperato oblatum esse, quem *Fermatius* proponens vel non prævideret, adeoq; nec præcavebat, vel nec viderat *Freniclus* solvens, adeoq; nec detexit; Uti nec prævidit forte *Fermatius* (nec *Freniclus* detexit) quæstionem tertiã; per numeros fractos solvi posse; adeoq; simpliciter

pliciter *quadratos* petebat, quum tamen vellet nonnisi *quadratos integros*.

Quod de numeri Fracti partibus aliquotis reponit Vir Cl. ad ea quæ nos hypothetice tantum dixeramus (nempe, si Fermatius & in his supponeret partes aliquotas,) num calori affectuum dandum sit, an festinationi potius, non determino, at certe vix putaverim Cl. V. sedate rem pensitasse, quum, pro numeri $\frac{343}{64}$ partibus aliquotis, haberi postulat $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, &c, vel etiam $\frac{7}{32}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{8}$, &c, non minus quam $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$. Eas enim pro partibus aliquotis, (ne quidem in quantitate continua, nedum discreta,) non reputandas esse, certum est tum per 3 & 4 *dd* 7 *Euclidis*, tum 1 *d* 5, quæ ad (aliquotæ) partis naturam postulant ut *totum metiatur*, (hoc est, ut aliquoties accepta illud æquet,) quod in illis non obtinet. Nam, verbi gratia, numerus $\frac{8}{7}$, sexies sumptus, minor erit numero $\frac{343}{64}$; at septies sumptus, eundem superabit: Non igitur hujus ille *pars* erit, sed *partes*, (ut loqui solet *Euclides*,) hoc est, *aliquota* pars non erit, sed saltem *aliquanta* & de reliquis similiter. Quod autem $\frac{343}{128}$ ejusdem numeri $\frac{343}{64}$ partem item aliquotam esse velit; quamquam illud meliori prætextu dici posset, utpote quod in quantitate continua admittendum erit, eadem ratione qua $\frac{1}{2}$ habebitur aliquota pars numeri 1, vel $\frac{1}{2}$ numeri 3: attamen in quantitate discreta non erit admittendum. Uti enim 343 sive $\frac{343}{1}$, qui Unitates numerat, supponit igitur Unitates illas actu discretas, non autem & unitatum semisses aliasve particulas: Sic & $\frac{343}{64}$, qui numerat sexagesimas-quartas, supponit quidem has sexagesimas-quartas (quippe res numeratas) actu discretas esse, & numerabiles; non autem & centesimas-vicesimas-octavas, quas quidem potentialiter inesse dicas & mensurabiles, (sicut unitatibus insunt semisses,) non actu discretas.

Cur deniq; ulteriorem expositi Problemati solutionem neglexerim; jam aliquoties dictum est. Quibus si fidem non adhibeat V. Cl. vix putandum erit ut eisdem repetitis sit habiturus.

Quoniam vero tam importunus urget Clariss. V. ut vix opprobrijs abstineat ni fecerim; libuit tandem (quod prius non feceram) ut sibi satisfaciam, quæstionem illam de Cubo, ad mentem suam serio aggredi; ut videat sua de partibus aliquo-

tis

tis mysteria nec nobis esse impervia, nec suum illud *Facile est illud despicere ad quod non possumus pervenire* identidem oggerat. Dicimus itaque.

1. Certum est cujusvis numeri primi quamlibet potestatem, partibus suis aliquotis additam, summam esse Progressionis Geometricæ, (puta $1, R, R^2, R^3, R^4$, &c.) cujus primus terminus (A) est 1; Radix progressionis sive ratio communis (R) ille primus numerus; & numerus terminorum (T) unitate major quam Exponens dictæ potestatis.

2. Certum item est universaliter (per pr. 68. cap. 33. nostræ Matheseos Universalis) summam Geometricæ Progressionis esse $\frac{R^t - 1}{R - 1}A$; adeoq; in præsenti casu, (propter $A = 1$) erit $\frac{R^t - 1}{R - 1}$.

3. Item, cum de potestate Cubica jam agitur, adeoq; vel tertia, sexta, nona, aliave cujus Exponens est per ternarium divisibilis; certum est, T numerum terminorum (quippe unitate majorem quam est Exponens Potestatis propositæ) esse 4, 7, 10, aliumve qui numerum ternario divisibilem unitate superet.

4. Si itaq; cujusvis numeri primi potestatem quartam, septimam, decimam, &c, unitate minutam, (nempe $R^t - 1$,) per eundem numerum primum unitate minutum ($R - 1$) dividamus; prodibit ejusdem potestas aliqua cubica (puta tertia, sexta, nona, &c.) partibus suis omnibus aliquotis addita.

5. Omnes igitur numeros primos, Centenario minores, ad hanc normam exigens, invenio, numeri, 2, cubum partibus suis additum, esse $15 = 3 \times 5$; ejusdem cubicubum (seu potestatem sextam) sic auctum, 127 (numerum primum;) potestatem nonam sic auctam, $1023 = 3 \times 11 \times 31$. Et similiter in reliquis, quatenus hîc exhibentur, per factores rnumeos primos aggregatum illud componentes.

Radix.

Radix.	Cubus partibus suis omnibus aliquotis auctus.	Radix.	Cubus auctus.
1.	1	29.	2×2×3×5×421.
2.	3×5.	31.	2×2×2×2×2×2×13×37.
2×2	127.	37.	2×2×5×2603.
2×2×2.	3×11×31.	41.	2×2×3×7×29×29.
2×2×2×2.	8191.	43.	2×2×2×5×5×11×37.
~~2×2×2×2×2.~~	~~7×11×23×37~~	47.	2×2×2×2×2×3×5×13×17.
2×2×2×2×2.	3×5×17×257.	53.	2×2×3×3×3×5×281.
3.	2×2×2×5.	59.	2×2×2×3×5×1741.
3×3.	1093.	61.	2×2×31×1861.
3×3×3.	2×2×11×11×61.	67.	2×2×2×5×17×449.
5.	2×2×3×13.	71.	2×2×2×2×3×3×2521.
5×5.	19531.	73.	2×2×5×13×37×41.
5×5×5.	2×3×11×71×521.	79.	2×2×2×2×2×5×3121.
7.	2×2×2×2×5×5.	83.	2×2×2×3×5×7×13×53.
11.	2×2×2×3×61.	89.	2×2×3×3×5×17×233.
13.	2×2×5×7×17.	97.	2×2×5×7×7×941.
17.	2×2×3×3×5×29.		
19.	2×2×2×5×181.		
23.	2×2×2×2×3×5×53.		

Atq; ad eandem formam, qui id operæ pretium esse putaverit, poterit vel plurium numerorum primorum Cubos expendere, vel etiam horum alias potestates Cubicas.

6. Certum est, ex hisce cubis sic exploratis, nullum esse qui solitarius rem præstabit præter 1, & cubum numeri 7. Cum enim nullus numerus primus præter, 1 potest esse quadratus non potest alius quadratus expectari, nisi ubi omnes factores sunt gemini; quod quidem ad numerum 7 videre est, nempe 2, 2; 2, 2; 5, 5. alibi nusquam.

7. Ut igitur habeatur alius quadratus, cubo suis partibus aliquotis addito æqualis, (nisi plurium numerorum primorum cubos, aut horum alias potestates, libeat expendere) sumendus erit cubus compositus ex duorum pluriumve numerorum primorum cubicis potestatibus.

8. Si duorum pluriumve numerorum primorum potesta-

te

tes quælibet invicem ducantur factus, partibus suis aliquotis auctus, equatur facto ex componentibus partium suarum aliquotarum additione auctis. Exempli gratia; si $a^3 + a^2 + a + 1$ ducatur in $b^2 + b + 1$, habebitur aggregatum numeri $a^2 b^2$ partibus suis aliquotis aucti; quod si iterum ducatur in $c+1$, habebitur numerus $a^3 b^2 c$ partibus suis aliquotis auctus. (Quod & universaliter ostendi potest de duobus quibusvis numeris inter se primis.)

9. Cubus igitur ex duobus pluribusve expositorum cuborum (modo non ab eodem numero primo oriuntium) compositus, partibus suis aliquotis additus, æquabitur facto ex cubis componentibus sic auctis; exempli gratia, Quia cubus numeri 2 sic auctus, est $15 = 3 \times 5$; & numeri 3, est $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$; igitur cubus numeri $6 = 2 \times 3$, sic auctus, æquabitur numero $600 = 15 \times 40 = 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$. Et in reliquis similiter.

10. Ut igitur cubus sic compositus, partibus suis aliquotis auctus, fiat quadratus; tales sumendi sunt cubi componentes, ut eorum sic auctorum omnes factores primi sint gemini; hoc est, ut singuli factores primi occurrant vicibus numero paribus.

11. Quoniam igitur, inter factores expositorum cuborum sic auctorum, numeri primi ~~13~~, 41, 127, 181, 233, 257, 281, 421, 449, 521, 941, 1093, 1741, 1861, 2521, 2603, 3121, 8191, & 19531, nonnisi semel singuli reperiantur; manifestum est cubos illos ubi habentur (nempe cubos numerorum 19, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 89, 97, & numeri 2 cubum secundum, quartum, quintum, ~~& sextum~~, item numeri 3 cubum secundum, & numeri 5 secundum & tertium) statim eliminandos ut huic negotio inutiles; (nisi plures adhuc cubi expendantur;) quoniam nulla expositorum cuborum compositione fieri possunt gemini. Sed & propter eliminatum cubũ numeri 61, eliminandus erit cubus tertius numeri 2, (quia jam factor 31 nusquam alias habetur.) Et propter hunc eliminatum, eliminandus erit cubus numeri 43, ubi factor 11 sibi geminum non sortietur, (jam enim nusquam alibi reperitur præterquam ad tertium cubum numeri 3, ubi jam geminus est.) Et propter hunc eliminatum, eliminandus erit & cubus numeri 31 (ubi 37 jam erit solitarius.) Denique ~~propter eliminatum~~

~~tertium~~

~~tertium cubum numeri 5~~, eliminandus est cubus numeri 17; quia ~~jam~~ nusquam alibi reperitur 29 solitarius.

12. Ex reliquis qui supersunt, manifestum est cubum numeri 1, quoniam multiplicando nihil immutat, compositioni inutilem. Item cubum numeri 7 (ubi aggregati factores sunt omnes gemini,) postquam alium cubum commodum alias invenimus, usui quidem futurum esse, (quoniam & cubus ille in hunc ductus factum illum dabit negotio commodum, quia quadratus in quadratum ductus erit quadratus; quod & de duobus quibusvis cubis negotio accommodis & inter se primis intelligendũ erit;) Seponendum tamen tantisper esse donec istiusmodi alius appareat. Quum enim ibidem factores omnes sint jam gemini, nullum alibi factorem solitarium geminare possunt.

13. Reliquos igitur ut sigillatim perpendamus. Quoniam factor 53, nuspiam nisi ad numerus 23 & 83 conspiciatur; manifestum est, vel horum cubos componendos esse, vel utrumque eliminandum. Quoniam vero inter factores ad horum utrumque repertos, simul junctos, præter 2 sexies positum, & 3, 5, 53, bis positos, reperiantur solitarii 2, 7, 13; quærendi sunt aliunde factores qui hos tres geminent. Quia vero 13 inter factores nondum eliminatos nusquam conspiciatur alibi quam ad numeros 47 & 5; experiamur utrumque; quorum si neuter succedit, eliminandus erit numerus 83, adeoque & 23.

Ad numerum itaque 47, cum reperiantur (præter geminos) 2, 3, 5, 13, 17. qui tribus pridem solitariis 2, 7, 13, juncti, geminabunt quidem 2, & 13, sed solitarios jam exhibent 3, 5, 7, 17: Hi vero juncti factoribus ad numerum 13 repertis (ubi sola spes quærendi numero 17 geminum) propter solitarios ibidem 5, 7, 17, unicum 3 relinquent solitarium. Huic autem si geminum quæramus ex factoribus ad numerum 41, manebit illic 7 solitarius sine spe comitis: Sin ex factoribus ad numerum 5, manebit illic 13 plane derelictus: Sin adeamus numerum 11, manebunt illic solitarii 2, & 61; quorum si posteriori comitem sumamus ex cubo tertio numeri 3, manebit tamen 2 solitarius sine spe socii; (quamvis enim videatur prima fronte haberi posse ex numeri 3 cubo primo, id fieri ta-

men non poteſt, quia ejuſdem numeri 3 cubus tertius jam aſſumptus primum illum in ſe comprehendit:) Sin denique (ubi ſola ſpes reliqua eſt) numerum 2 adeamus ut quæratur ſolitario 3 comes, manebit illic ſolitarius 5; cui ſi ſocium quæramus à primo cubo numeri 3, (qui ſolus ex nondum rejectis ſpem facit) manebit illic numerus 2 ſolitarius ſine ſpe comitis, (non enim aſſumi poteſt huic ſocius ex ejuſdem muneri 3 cubo tertio, ob cauſam modo dictam:) Cum itaque aliunde ſpes non ſuperſit (quod inſpectis reliquis numeris patet) conſtat, ex numeris 47 & 5, primum non ſuccedere.

Experiendus ſupereſt numerus 5; num inde ſolitariis 2, 7, 13, ſupra memoratis ſocios habere liceat. Reperiuntur autem illic (præter geminos) ſolitarii 3, & 13; qui ſolitariis 2, 7, 13, juncti, relinquunt adhuc ſolitarios 2, 3, 7, Quum vero 7 nuſpiam alias reperiatur niſi ad numeros 13, & 41; neutrobique haberi poteſt. Si enim numerum 13 adeamus, manebit illic ſolitarius ſine ſpe ſocii numerus 17 (fruſtra ſiquidem numerum 47 adeamus, utpote jam rejectum.) Sin adeamus numerum 41, habebimus quidem illic numeris 3 & 7 geminos, ſed manebit ſolitarius 2, cui nuſquam ſpes ſocii niſi à numero 3 vel 11, (non autem ab utroque ſimul;) non à 3, quia manebit illic ſolitarius 5, cui ſi ad numerum 2 quæramus comitem (neque enim aliunde ſperandus) manebit illic ſolitarius 3, cui à numero 11 fruſtra quæretur ſocius (nec tamen aliunde ſperandus) propter 2 ibidem ſine ſpe derelinquendum; neque etiam à numero 11 habebitur ſocius ſolitario pridem 2, tum enim ibidem ſolitarii erunt 3 & 61, quorum poſteriori ut ut comes ſuppeditari poſſit à tertio cubo numeri 3, reliquo tamen 3 ſocius non habebitur; fruſtra ſiquidem ſperatur à numero 2, ubi derelinquendus eſſet 5 ſolitarius. Cum itaque, omnibus penſitatis, nec à numero 5, nec à numero 47, ſuppetias ferri poſſe conſtet; eliminandus erit numerus 83, adeoque & numerus 23.

14. Cum ad numerum 47, reperiantur (præter geminos) factores ſolitarii, 2, 3, 5, 13, 17; quorum 13 non alibi reperiatur alias quam ad numerum 5, nec 17 alibi quam ad numerum 13; manifeſtum eſt vel componendos eſſe cubos numerorum 5, 13, & 47, vel ſimul omnes eliminandos.

Cum itaque ad numerum 5 habeantur factores ſolitarii 3, 13;

ad

ad numerum 13, solitarii factores 5, 7, 17; atque ad numerum 47, factores solitarii 2, 3, 5, 13, 17; hi omnes conjuncti (præter eos qui conjunctione geminantur) solitarios adhuc exhibent 2 & 7. Cumque 7 non alibi (ex nondum eliminatis) quam ad numerum 41 reperiatur, componendus etiam hic erit cum tribus illis, vel omnes quatuor eliminandi. Cumque ad numerum 41 (præter geminos) reperiantur factores solitarii 3 & 7, qui additi prioribus 2 & 7, geminant quidem 7, sed solitarios adhuc exhibent 2 & 3; quærendi itaque erunt hisce comites. Quod quidem duobus modis præstabitur; nec pluribus.

Primo quidem, ad numerum 11, habentur (præter geminos) solitarii factores 2, 3, 61; qui prædictis 2 & 3 adjuncti, ipsos geminant, sed & solitarium relinquunt 61, qui tamen comitem obtinebit ex tertio cubo numeri 3, ubi item 61 est unicus factor solitarius. Adeoque si una cum præcedentibus quatuor numerorum 5, 13, 41, 47, cubis, componatur item cubus numeri 11, & cubus tertius (sive nona potestas) numeri 3; cubus ex hac compositione emergens partibus suis omnibus aliquotis additus, conficiet quadratum; cujus quidem factores primi iidem sunt atq; cuborum componentium sic auctorum omnes factores primi: nempe 2 sexdecies, 3 quater, 5, 7, 13, 17, 29, & 61, bis.

Sed & idem cubus sic inventus si in cubum numeri 7 ducatur, factus etiam & cubus erit, & additus suis partibus aliquotis faciet quadratum; addet utique prioris quadrati factoribus, 2 quater, & 5 bis.

Cum verò cubus ille sic compositus non alium ex expositis intactum relinquat quam cubum 1 (qui nihil immutat) & cubum numeri 2, qui partibus suis additus dat 3 × 5 qui numerus quadratus non est; (cubus enim numeri 3 primus, in tertio continetur, adeoque non iterum componendus:) patet eundem cubum sic compositum non posse cum alio ex expositis iterum componi, ut factus suis partibus additus sit quadratus.

Secundo, potest tamen qui ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, componitur cubus, (ubi, ut dictum est, solitarii manent factores 2 & 3,) aliter suppleri (omisso nempe cubo numeri 11, a-

deoque & tertio cubo numeri 3, qui vel, ut prius, ſimul ſumendi, vel ſimul ſaltem rejiciendi erunt, propter factorem 61 non alibi repertum.) Cubus enim numeri 2 ſupplebit factores ſolitarios 3 & 5; cubuſque primus numeri 3, ſupplebit ſolitarios factores 2 & 5; unde ſolitarii pridem factores 2 & 3 comites nacti ſunt, & 5 utrobique repertus geminatur. Adeoque ſi numerorum 5, 13, 41, 47, cubi, cum cubis illis numerorum 2 & 3, componantur; cubus hac compoſitione emergens partibus ſuis aliquotis auctus, conficiet quadratum; cujus quidem factores omnes primi, (iidem nempe cum componentium cuborum ſic auctorum primis factoribus,) erunt 2 quatuordecies, 3 & 5, quater, 7, 13, 17, & 29, bis.

Idemque cubus in cubum numeri 7 ductus, alium adhuc conſtituet cubum ut ſupra; qui quadrati emergentis factoribus jam enumeratis, adjunget 2 quater, & 5 bis.

quoniam vero cubus ſic compoſitus non alios ex expoſitis intactos relinquit præter cubum numeri 11, qui aſſumi non poteſt (ut dictum eſt) ſine cubo tertio numeri 3, (qui ſimul admitti non poteſt cum ejuſdem numeri 3 cubo primo qui jam ingreditur compoſitionem:) manifeſtum eſt cubum ſic compoſitum non poſſe ulterius cum ullo expoſitorum cuborum componi ita ut factus ſit qualis imperatur.

Sed & porro manifeſtum eſt, compoſiti (ut dictum eſt) cubi ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, ſolitarios qui reſtant factores 2 & 3, non aliunde habere poſſe comites quam vel ex cubo numeri 11, una cum tertio cubo numeri 3; vel ex cubo numeri 2 una cum numeri 3 cubo primo; (nulli utique ſuperſunt alii præter cubos 1 & 7, quorum neque alter neque uterque id præſtabunt:) Adeoque non pluribus quam dictum eſt modis ſuppleri poſſunt.

15. Sin hoſce cubos numerorum 5, 13, 41, 47, (quos vel ſimul ſumendos eſſe, vel ſimul omittendos, jam oſtendimus) omittamus: ex reliquis componi cubum imperatum non poſſe conſtat. Cum enim (ſepoſitis ob cauſas jam dictas cubis numerorum 1 & 7) non alii ſuperſint quam cubi numerorum 2 & 11, primoque & tertio numeri 3; ſumptis cubis numeri 11, & tertio numeri 3, (qui ſimul vel ſumendi vel negligendi, propter 61 utrobique nec alias repertum) ſolitarii manebunt factores 2

&

& 3, quos ambos nec supplere poterit cubus numeri 2, nec admitti potest cubus numeri 3 primus, propter tertium jam admissum: Omissis autem tum cubo numeri 11, tum tertio numeri 3, reliquos duos, nempe cubum numeri 2, cum primo numeri 3, invicem compositos, rem imperatam non absolvere certum est; manebunt utique factores solitarii 2 & 3.

16. Constat itaque (perpensis omnibus) ex cubis superius expositis, nullum esse cubum simplicem qui partibus suis aliquotis additus conficiet quadratum, præter cubos numerorum 1 & 7. Sed neque cubum ullum ex his ut dictum est compositum id ipsum præstare præter quatuor illos jam indicatos: quorum nempe primus componitur ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, 11, 3, 3, 3: Secundus, ex iisdem cum cubo numeri 7: Tertius, ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, 2, 3: Quartus ex iisdem cum cubo numeri 7.

Qui plures adhuc istiusmodi cubos velit, idque operæ pretium fore putaverit, eodem modo quo nos numeros primos centenario minores expendimus, expendat licet vel plures primos numeros, vel horum saltem plures potestates. Mihi saltem sufficiat, veram investigandi methodum tradidisse, ut sentiat tandem Freniclus me non ideo neglexisse priùs quod eo non potuerim pervenire.

Ad calculos autem res redacta cum fuerit, invenio quatuor illos cubos compositos, eosdem plane esse, (& eadem forsan methodo inventos,) cum quatuor illis à D. Freniclo exhibitis.

Exposita aut quæstione de cubo qui partibus suis aliquotis additus conficiat quadratum: eâdem plane methodo utendum erit, mutatis mutandis, in altera de Quadrato qui partibus suis aliquotis additus conficiat cubum: Nempe numerorum primorum quousque libet potestates quadraticæ (secunda, quadrata, sexta, &c.) perpendendæ, ut videatur quem illæ partibus suis aliquotis additæ numerum efficiant, & ex quibus factoribus primis is componatur; quæ tandem potestates quadraticæ ita componendæ erunt, ut factores illi primi ad eas spectantes sint (non ut prius gemini, sed) terni similes,

Sed & eadem clavis prudenter adhibita alia istiusmodi de partibus

tibus aliquotis mysteria reserabit; quæ illis relinquo quibus lubitum est se in his negotiis exercere.

Quæstionem quod attinet à me propositam (obiter quidem, idque D. Fermatio, non D. Freniclo) de *duobus numeris quadratis qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam* (quales 16 & 25;) de cujus possibilitate quærit Freniclus: Quærit, inquam, id quod petitur. Perinde utique mihi erit sive solvat problema, sive ostendat esse insolubile (utrumvis enim faciat, justæ solutionis loco habebitur) sive denique plane negligat, (neque enim ego magni momenti rem esse judico, ut vel inde multum laudis acquirat si solvat, vel, si secus, amittat.) quoniam vero sciscitatur; sciat quæstionem à me propositam solubilem esse, idque mihi certò constare.

Theorema deniq; quod attinet à me propositum pridem, cujus demonstrationem (ut ais) aliunde non expectas, atque à me expetis: libet hic subjungere tum ipsum Theorema, tum ejusdem Demonstrationem.

Theorema.

Sit Pyramidis vel Coni Frustum (parallelis planis abscissum:) Cujus Basis major, æquetur quadrato rectæ A; *minor, quadrato rectæ* E; *Altitudo*, F. *Dico.*

Si cruribus AE (*vel his æqualibus*) *constituatur angulus graduum* 120, *& compleatur Triangulum, eique circumscribatur circulus: Quadratum Radii circuli circumscripti, in Altitudinem Frusti ductum,* (RqF,) *æquatur Frusto.*

E F S F E X A

A T E C R e T T a e a

Demon-

Demonstratio.

Differentia rectarum A E, dicatur $X = A - E$. Et fiat, ut X ad F, sic A ad S, & E ad P. Erit S, altitudo totius Pyramidis vel Coni: P, partis ad verticem abscissæ. Adeoque sAq, triplum totius Pyramidis vel Coni; PEq, triplum partis abscissæ; & $SAq - PEq$, residui Frusti triplum.

Est autem $S = \frac{FA}{X}$, $P = \frac{FE}{X}$, ergo $SAq - PEq = \frac{FAc - FEc}{X = A - E}$ $= \frac{Ac - Ec}{A - E} F$, triplum Frusti.

Sed est $Ac - Ec = Aq + AE + Eq$ in $A - E$. Ergo $\frac{Ac - Ec}{A - E} =$ $Aq + AE + Eq$. Et propterea $Aq + AE + Eq$ in F, triplum Frusti.

Si autem formetur Triangulum ut dictum est; Quadratum Basis Tq æquabitur tribus $Aq + AE + Eq$ simul sumptis. Sed & idem Tq, æquabitur $3\,Rq$, triplo quadrato Radii circumscripti circuli. (quorum utrumque statim demonstrabitur.) Adeoq; tum $TqF = 3\,RqF$ est triplum Frusti, tum RqF Frusto æquale. quod erat propositum.

Quod autem probandum suscepimus, $Aq + AE + Eq = Tq = 3\,Rq$. Sic ostendimus.

Si Triangulum ut dictum est circulo inscribatur; cum Angulus cruribus AE contentus sit Angulus in Peripheria, grad. 120, adeoque insistat arcui graduum 240; recta T complens triangulum erit chorda tum arcûs graduum 240, tum & arcûs graduum 120, (residui nempe ad integrum circulum.) Adeoque latus erit Trigoni regularis inscripti. Et propterea $Tq = 3\,Rq$.

Sed et $Aq + AE + Eq = 3\,Rq$. quod sic probatur.

Si recta A ponatur subtensa arcûs simpli, erit arcûs tripli subtensa $3A - \frac{Ac}{Rq}$. Sin ponatur E subtensa arcûs simpli, erit hujus arcûs triplicati subtensa $3E - \frac{Ec}{Rq}$. Est autem una eademq; recta, puta C, tum Arcus A triplicati, tum triplicati arcûs E, subtensa. (Cum enim AE, simul sumpti, compleant trientem

circuli,

circuli; utrique triplicati complebunt circulum integrum. Adeoque quæ ex una parte subtendit triplo arcus A, eadem recta ex altera parte subtendit triplo arcus E, quippe residuo ad integrum circulum. Et propterea $3A - \frac{Ac}{Rq} = (C=) 3E - \frac{Ec}{Rq}$. Et $3RqA - Ac = 3RqE - Ec$. Et $3RqA - 3RqE = Ac - Ec$. Adeoque $3Rq = \frac{Ac - Ec}{A - E} = Aq + AE + Eq$. Quod demonstrandum suscepimus.

Vel sic brevius. (sine ope rectæ T, quæ nulla necessitate sed perspicuitatis causa additur,)

quoniam $A - E . F :: A . \frac{FA}{A-E} :: E . \frac{FE}{A-E}$. Est $\frac{FAc - FEc}{A - E}$ $= \frac{Ac - Ec}{A - E} F$, triplum Frusti.

Sed & (propter angulum gr. 120.) arcus A, E, simul, complent trientem circuli; eorumque tripli, circulum integrum; qui (tripli) propterea eandem habebunt subtensam. Nempe $3A - \frac{Ac}{Rq} = 3E - \frac{Ec}{Rq}$. Adeoque $3RqA - Ac = 3RqE - Ec$; & $3RqA - 3RqE = Ac - Ec$; & $3Rq = \frac{Ac - Ec}{A - E}$

Ergo $3RqF$ frusti triplum, & RqF frusto æquale, quod erat propositum.

Superest tandem ut prolixæ importunitatis veniam orem; atque ut exorem porro, si per te liceat, ut quem hactenus tibi demeruisti, amare adhuc ne dedigneris,

Oxonii, Mart. 4. 165$\frac{7}{8}$. Stilo Angliæ.

Illustrissime Domine,

Humillimum pariter, & devinctissimum servum,

Joh. VVallis.

Ubi circuli quadraturam à me *perperam* investigatam insinuat, quid sibi velit vir Nobilissimus non satis assequor. Quam ego quadraturam exhibui hæc erat.

Ut *factum ex quadratis numerorum imparium* 3, 5, 7, 9, *&c. in infinitum*; ad *factum ex iisdem quadratis unitate minutis*; sic *quadratum diametri*, ad *aream circuli*.

Ubicunque autem continuam illam quadratorum multiplicationem abrumpere libeat, intra hos limites res coercebitur: *Si factum ex quadratis ducatur in radicem quadraticam unitatis auctæ aliquotâ sui parte quæ denominatur à radice ultimi quadrati*, habetur quantitas *justâ major*: sin *quæ denominatur ab eadem radice unitate auctâ*, habebitur quantitas *justâ minor*. Sic $9 \times 25 \times 49 \times 81 \times \sqrt{1\frac{1}{9}}$ ad $8 \times 24 \times 48 \times 80$, est ratio major, quam quadrati ad circulum; at $9 \times 25 \times 49 \times 81 \times \sqrt{1\frac{1}{10}}$ ad $8 \times 24 \times 48 \times 80$, est ratio minor quam quadrati ad circulum.

Addo; eandem esse rationem rectanguli sub conjugatis axibus, (vel etiam pallelogrammi cujusvis circumscripti,) ad aream Ellipseos.

Hanc quadraturam si *falsam* putaverit Vir Nobilissimus, si potis est, refellat. Ostendat, inquam, rationem circuli ad quadratum diametri, vel majorem esse, vel minorem, quã quę à nobis assignatur. Sin levius aliquod insinuet, ob quod non placeat; aut contemnendam putaverit: nolo ego sua sibi verba reponere, *facile est ea despicere ad quæ non datur assequi*: sed illud potius,

--- *Siquid novisti rectius istis, Candidus imperti.* ---

EPISTOLA XXIV.

D. Vice-Comitis Brounker *ad D.* Joh. Wallis

SIR

I have herewith sent you a Copy of what I have written to Sr *Kenelme Digby*,* (upon the perusal of these others from him) to be sent with your former, in case it be not allready gone; or at least to follow it. Which is all time will now per- mit

*Epist. XXVII

mit me to say, excepting what I must not forget, still to assure you, that I am,

SIR,

Your most faithfull friend and servant
Brounker.

13 March 165½.

EPISTOLA XXV.

D Kenelmi Digby *ad* D. Joh. Wallis. *præcedenti inclusa, una cum subsequente.*

I hope you have ere this received mine to you of the 6 of this moneth; in which I enclosed a copy of a paper addressed to me that Monf. *Frenicle* wrote suddainly and immediatly upon sight of the letter you were pleased to honor me withall of the 21 *Novemb.* past (which lay so long upon the way.) That paper contained his reflections but upon the first part of your letter, the time not permitting him to write more then. The next morning he went out of towne for some dayes; but at his returne he entreated of me a second perusall of your letter, and brought it me back the next morning, together with the enclosed paper in answere to the second part of yours: which he hath framed as though it were a third person that wrote it, and hath desired me to conceale his name, lest it might be thought he made vanity of having some extraordinary knowledge in a sciecne that he professeth to be very ignorant of, as having never had any Master in it, nor having scarce studyed it, but meerely played with it for his recreation and to satisfie the propension of his Genius. But I that professe candor and open dealing in every thing and with every body, would not let you remaine in the darke in knowing who is your Antagonist, since I have knowledge of him: who though he passe in his owne conceit for a very slight Mathematician; yet in that part of it which concerneth numbers, all France, even Monf. *Roberval* and Monf. *Fermat*, (and Monf. *des Cartes*, when he was alive) doe acknowledge him their Master, and superior to them at a huge distance. And chiefly, for that what they do with much labour, and by

by many circuits and operations, he doth immediatly upon the sight of the question, and without any operation, as though he had an intuitive knowledge of those things, and all his trouble is to set it downe in paper. However, I debated much with my selfe, whether or no I should send you these two last papers: for though the expressions in them be modest and gentle in comparison of what learned men in these parts do write one against an other (as you may see in the disputes betweene *Gassendus* and *des Cartes*, *Morinus* and *Gassendus*, *des Cartes* and *Fermat*, *Fermat* and *Frenicle*) yet me thinketh they are tarter than we vse in England, or than I am sure I should use in the like case, if *I* were of a different opinion. But that which mainely turned the scale with me, was the considering, that if you did not see what these persons say to you, and consequently should make no reply to them, they might thinke they had the better of our nation, and Vniversity: which *I* am sure you will take a course shall not be, when once you know what is objected against you. And besides, *I* thought it belonged to that respect *I* owe and professe unto you, that you should be acquainted with whatsoever *I* hear concerning you.

It is hard for me to put limits to my penne when *I* am discoursing with you; so much content *I* have, in keeping present to my thoughts so excellent a person. But *I* must not be so much a selfe-lover, as to delight my selfe at too great a charge of your sufferance and wearying. *I* will therefore trouble you no longer for the present, but kissing your hands do take leave and rest

Your most humble and most affectionate servant,

Paris, $\frac{20}{10}$ *Febr.* $165\frac{8}{7}$.

KENELME DIGBY.

Monf. *Frenicle* desires very much to see what satisfaction you give to the Probleme your selfe proposed: that then you may see what he sayth to it.

EPISTOLA XXVI.

D, de Frenicle, *ad D*. Kenelmum Digby.

Silentio præterire maluissem, Vir Illustrissime, cætera quæ in Epistola Clarissimi Wallisii circa numeros discutienda supersunt, quam in singulis immorari; sed cum à me quid de his sentiam expectes, non æquum est ut desiderio tuo defrauderis.

Sequitur aliud problema Clarissimi Viri D. Fermat.

Exponit primum Fermatius (ut habetur in Epistola VVallisii) Theorema quoddam his verbis.

Dato quovis numero non quadrato, dantur infiniti quadrati, qui in datum numerum ducti adscita unitate conficiant quadratum, Et exemplum præbet numeri 3, qui ductus in quadratos 1, vel 16, adscita unitate conficit quadratos 4, & 49. & asserit esse infinitos alios qui in 3 ducti idem præstent: quibus inveniendis legitimam methodum tradit VVallisius.

Sed pace sua dixerim, hoc quidem, nempe quod sint infiniti quadrati, qui in 3, vel in alium numerum non quadratum ducti faciant quadratum, est expositum Theorema, quod se demonstrasse affirmat Fermatius & quod affert ad exemplum tantum & ad præparationem; non igitur est problema quod solvendum proponitur. Quæruntur enim quadrati qui in quemlibet numerum non quadratum ducti adscita unitate faciant quadratum ad instar numeri 3, qui in quadratos 1, & 16, ductus adscita unitate facit quadratos; unde satis patet numeros integros pro quæsitis quadratis requiri. Certe posset excusari VVallisius si D. Fermat nullum exemplum; vel si in fractis etiam ut in integris proposuisset; sed cum in integris solummodo datum sit exemplum satis debuit intelligi solutionem in integris requiri, ut ipse postea Fermatius aperte declaravit, quærit enim numeros quales sunt 3, & 16, apparet igitur VVallisium æquivocationes quærere, ut problema eludat, & ipsum quod facilius erat selegisse & quod magis arduum subterfugisse. Cum igitur requirantur numeri quadrati, & nulla alia in solutione perspiciam quam species seu litteras & characteres quorum nonnulli mihi

sunt

sunt inusitati, & quibus numeri & quadrati referuntur; & quadrati quæsiti minimè exprimantur, sed omnes ignoti remaneant; non video quomodo quæstioni quæ postulabat certos quosdam quadratos, sit satisfactum: Fermatius enim quærebat ad exemplum cæterorum inveniendorum, ut quadrati exhiberentur qui ducti in numeros 61, 109, 127, adscita unitate quadratos conficerent. Et certè si quilibet quadratus æquè inventu facilis esset, ut in fractis evenit, nequaquam hos numeros potius quam alios elegisset.

Sed jam ad integros quid affert VVallisius? nullum profecto quadratum profert ex his qui requiruntur, nempe qui in alium numerum quam in 3, à Fermatio propositum ductus adscita unitate faciat quadratum, & agnoscit suum canonem exhibere non quidem solos quadratos integros sed omnes promiscue tam integros quam fractos. Certe si methodum integros à fractis segregandi invenisset proculdubio quæstionem solvisset. Sed cum sint innumeri fracti pro quovis integro & perpauci quadrati integri si fractis comparentur; si non adsit methodus quædam qua ista segregatio fieri possit, & si talis perquisitio casu sit perficienda, tantum esset, quam si unio vel adamas in tota maris arena conquirenda traderetur, vel acus, ut communi fertur adagio, in ingenti fœni acervo. Si vero talem quamdam methodum habet, cujus beneficio quadrati aliis numeris inservientes reperiri possint, cum in D. Freniclis opusculo latino dentur quadrati ad singulos numeros non quadratos usq; ad 150. ipse illos producat usque ad 200, vel si non vacat tot numeros perquirere, in sequenti tantum 151, nè dicam 313, qui quidem forsitan vires ejus excederet, sese exerceat Vir Clarissimus, alias nusquam mihi persuasum erit ipsam problematis solutionem esse assecutum; neq; illum omnes omnino quadratos pro singulis numeris, vel saltem unum quadratum pro quolibet numero præstitutum; cum unus tantum pro numero 151, vel 313, postuletur. Cum enim se demonstrare dicat, suam methodum omnes quadratos exhibere; nulla erit melior demonstratio quam numerorum exhibitio, præsertim cum pauci tantum quærantur. Vel saltem deducat cum methodo quadam certa quadratos inservientes numeris 61. & 109. qui habentur in 2a & 3a columna tabellæ in prædicto Freniclis opusculo exhibitæ;

hibitæ; vel numeros investiget 4ª columnæ ejusdem tabellæ, quorum ope prædicti quadrati facillimè construi possunt; cum enim in tabella quæsiti quadrati habeantur, multo minor profecto difficultas inerit in his quæ requiruntur,

Restat ultima solutio D. VVallisii, in qua multoties binos cubos tradit quorum summa æqualis est duobus aliis cubis. Hæc quæstio facillima esse debet, cum tu noveris illam pluribus modis tam facile solutam esse; attamen quamquam VVallisius multos dederit cubos, nullos plane tradidit præter eos quos sola multiplicatione aut divisione ab illo deduxit, quos à Frenicle acceptos ad ipsum transmisisti, & si habeas exemplar Epistolæ tuæ ad ipsum VVallisium in qua ipsi cubi continebantur, facile cognosces quinque sequentes Cuborum copulationes inter ipsos cubos reperiri. Istis autem quinque tota cuborum series à VVallisio data innititur.

Cuborum radices.

1ª. $1 + 12 = 9 + 10$.

2ª. $2 + 16 = 9 + 15$.

3ª. $10 + 27 = 19 + 24$.

4ª. $2 + 34 = 15 + 33$.

5ª. $9 + 34 = 16 + 33$.

Aliæ vero quæ sequuntur Cuborum copulationes numero 22. illæ sunt quas VVallisius dicit à Frenicleis differre, post quarum quamlibet positi sunt numeri indicantes de qua ex quinque copulationibus suprapositis quæque sint desumptæ; & per quem numerum cubos à nobilitate tua acceptos ad suorum constructionem vel diviserit vel multiplicaverit: nempe particula, *in*, indicat multiplicationem, & particula, *per*, denotat divisionem.

Cuborum radices.

C 3	+	C 36	=	C 27	+	C 30		1ª. in 8.
1	+	8	=	$4\frac{1}{2}$	+	$7\frac{1}{2}$		2ª. per 2.
1	+	17	=	$7\frac{1}{2}$	+	$16\frac{1}{2}$		4ª. per 2,
$4\frac{1}{2}$	+	17	=	8	+	$16\frac{1}{2}$		5ª. per 2.
8	+	64	=	36	+	60		2ª. in 4.
3	+	$11\frac{1}{2}$	=	11	+	$5\frac{1}{3}$		5. per 3.
5	+	40	=	$2\frac{1}{2}$	+	$37\frac{1}{2}$		2. in $2\frac{1}{2}$.
20	+	54	=	38	+	48		3. in 2.
60	+	132	=	8	+	136		4. in 4.
8	+	$6\frac{1}{3}$	=	$3\frac{1}{3}$	+	9		3. per 3.
48	+	99	=	27	+	102		5. in 3.
$\frac{3}{2}$	+	6	=	$4\frac{1}{2}$	+	5		1. per 2.
6	+	10	=	$1\frac{1}{3}$	+	$10\frac{2}{3}$		2. in $\frac{2}{3}$.
5	+	11	=	$\frac{3}{2}$	+	$11\frac{1}{2}$		4. per 3.
$\frac{2}{3}$	+	$5\frac{1}{3}$	=	3	+	5		2. per 3.
6	+	48	=	27	+	45		2. in 3.
10	+	80	=	45	+	75		2. in 5.
32	+	66	=	18	+	68		5. in 2.
30	+	66	=	4	+	68		4. in 2.
4	+	48	=	36	+	40		1. in 4.
30	+	81	=	57	+	72		3. in 3.
5	+	60	=	45	+	50		1. in 5

Unde non eſt quod mireris ſi tam facile unius horæ ſpatio vel centum præbere ſpondeat; quid enim facilius quam exiguos numeros multiplicare vel dividere,& certe cum unica tantum cuborum copulatione pluries milleni facillime & abſque ullo negotio exhiberi poſſunt. Non enim in hac operatione major ineſt labor, nec ſubtiliore indagatione vel induſtria indiget, quam multiplicare terminos cujuſlibet copulationis datæ, 1ª verbi gratia, nempe 1, 12. = 9, 10. per ſingulos ordine numeros, 2, 3, 4, 5, &c. & ſic ad libitum procedere: vel quod facilius eſt applicare (dividendo) ſingulos numeros cuborum radicibus, ut videre eſt in ſequenti tabella, & ſic in infinitum; ubi nulla opus eſt vel multiplicatione vel diviſione, niſi ſi lubet ad reductionem.

$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{2}$	=	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{12}{3}$	=	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{12}{4}$	=	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$	=	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{5}$

Nulla igitur illi necessitas inerat tam varie 5 illas cuborum copulationes implicare nisi quod fucatas suas solutiones & ex datis deductas magis latere voluerit; melius fuisset equidem vel de his omnino reticere, vel aliquas novas & datarum non multiplices præstare, præsertim cum inventu facillimæ sint, quales sunt quæ sequuntur etiam ab ipso Frenicle provenientes; & in quibus 4 termini nullam habent communem mensuram.

Cuborum radices.

C. $17 + 39 = 26 + 30$
$12 + 40 = 31 + 33$
$12 + 51 = 38 + 43$
$8 + 53 = 29 + 50$
$17 + 55 = 24 + 54$
$9 + 58 = 22 + 57$
$3 + 60 = 22 + 59$
$30 + 67 = 51 + 58$
$42 + 69 = 56 + 61$
$17 + 76 = 38 + 73$
$5 + 76 = 48 + 69$
$15 + 80 = 54 + 71$
$51 + 82 = 64 + 75$

Non convenit igitur ut in his minutissimis rebus, quæ vix in parvulis laudem aliquam promererentur, vires suas probatas esse jactitet, sin minus non est quod Atlanteos ausus aggrediatur. Cæterum declinasse mihi videtur à solutione horum proble-

problematum in quibus nulla eſt ambiguitas circa numeros integros ſeu fractos; nempe, Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere; & Datum numerum ex duobus cubis compoſitum, ut 28, in duos alios cubos rationales dividere. In quibus ſatis apparet numeros integros non poſſe quæſitis ſemper ſatisfacere, & idcirco fractos etiam eſſe adhibendos.

Hæc ſunt, Vir Nobiliſſime, quæ mihi modo in mentem venerunt circa ſolutiones VVallisii ad Fermatii quæſtiones numericas & quæ de his cenſeam. Quæ quidem nullo modo ſcribere ſuſcepiſſem, niſi ad obtemperandum tuis mandatis, ad quæ me ſemper paratiſſimum invenies. Vale.

EPISTOLA XXVII.

D. Vice-Comitis Brouncker *ad D.* Kenelmum Digby.

Sir,

ABout a fortnight or three weeks ſince, I received yours of the 6. of *Febr.* wherewith you were pleaſed to honour me; for which I moſt humbly thank you. And yeſterday I met with yours of $\frac{20}{10}$ *Febr.* 165$\frac{8}{7}$ to Dr. *Wallis*, which with the incloſed from Mounſ. *Frenicle* (according to the liberty you give me) I have peruſed; and doe thereby perceive that the laſt letter from Dr. *Wallis* (of a date I think not much later than mine, which had the good fortune to kiſſe your hands) hath not been yet received (though in the abſence of Mr. *White* Mr. *Farrar* undertook to ſend it ſafely.) For otherwiſe I am confident Mounſ. *Frenicle* had omitted the greateſt part at leaſt, of what he hath been pleaſed to ſay in both thoſe papers: Becauſe that preſents you a very eaſie, plain, and certain method for the ſolving of that Probleme in Integers. For (notwithſtanding that Mounſ. *Frénicle* is pleaſed to ſay, —*Cum in D. Freniclis opuſculo Latino dentur quadrati ad ſingulos numeros non quadratos uſque ad* 150, *ipſe illos producat uſque ad* 200: *vel ſi non vacat tot numeros perquirere, in ſequenti tantum* 151, *ne dicam* 313, *qui quidem forſitan vires ejus excederet, ſeſe exerceat vir Clariſſimus: alias*, &c.)

R within

within the space of an hour or two at most this morning, according to the method therein delivered, I found that $313 \times Q7170685, -1. = Q126862368.$ and therefore that $313 \times Q(2 \times 7170685 \times 126862368 =) 1819380158564160, +1. = Q32188120829134849.$ which I thought fit to present you, because Mounf. *Frenicle* may thence perceive, that nothing is wanting for the perfect solution of that Probleme. It remains onely now (Noble Sir) that I assure you, that my Father and Mother could not, nor any other can more honour and esteem you, nor be prouder of your friendship, than doth, and is,

13 *March* 165$\frac{7}{8}$.

Sir,

Your most humble and most faithfull servant

BROUNKER.

EPISTOLA XXVIII.

D. Joh. Wallis *ad D.* Kenelmi Digby.

Illustrissime vir,

Literis quibus me dignatus es Tuis, 6 Febr. datis, simul cum Frencleis inclusis, jam ante responsum dederam, quam sequentes $\frac{20}{10}$ Febr. (quas hac hora accipio) ad meas manus pervenerant. Persentio autem (quod doleo) quas jam antea miseram Decemb. 26. datas, te nondum accepisse cum ultimæ illæ tuæ mitterentur. Quas quidem si vidisset D. Freniclus, certum est se literas ipsius ultimas, vel integras vel maximam saltem partem, omissurum fuisse, si non & præcedentes.

D. Fermatii Problema quod spectat, *De infinitis numeris quadratis, qui in non-quadratum ducti, unitate deficiant a quadrato*, cum præfixo Theoremate (quorum utrumque erat propositum, nobis saltem, nescio an & Freniclo; ut non sit cur illud mihi tanquam *ἀπροσδιόνυσον* objiciat:) neque id in numeris Fractis tantum, sed &

& in Integris. Postquam enim de Integris se exposuerat Fermatius, docuimus & Integros à Fractis secernere: eaque omnia præstitimus quæ jam postulat Freniclus; quod nec ipse diffitebitur ubi literas illas nactus fuerit Dec. 26 datas. Nec regulas tantum exhibuimus, (quod tamen exhibuisse sufficeret,) sed & earundem praxin ostendimus; non quidem in numeris 61, 109, 127, qui fuerant, uti videtur, Freniclo propositi; at saltem in numeris nihilo facilioribus, 109, 149, 433, qui à Fermatio fuerant propositi nobis. Quod & jam nuperrime præstitit D. Vicecomes Brouncker in numero 313, quem ut nobis insuperabilem proponit Freniclus. Quod & eadem facilitate fiet de numero 151 aut quovis alio. Nec dubitabit Freniclus, ubi literas supra memoratas acceperit; quin nodum illum perfecte intelligamus.

Quod autem innuit me, dum plures cuborum combinationes dederim, qui essent bini binis æquales, nonnisi paucas istiusmodi combinationes æqualiter vel multiplicasse vel divisisse: Id omnino verum est. Neque tamen est cur id in me culpet, cum & ipse mihi in eadem semita præiverit. Numeri enim qui ad me perferebantur tanquam ab ipso exhibiti, hi erant,

$$1729 = C\,9 + C\,10 = C\,1 + C\,12.$$
$$4104 = C\,9 + C\,15 = C\,2 + C\,16.$$
$$13832 = C\,18 + C\,20 = C\,2 + C\,24.$$
$$32832 = C\,18 + C\,30 = C\,4 + C\,32.$$

&c. &c.

Ubi manifestum est numeros in combinatione tertia & quarta; non alios esse quam numerorum in prima & secunda æquimultiplices. Quam autem illud facile fiat, non ignorat Freniclus, sed nec nobis spero invidebit quod & ipse noverim. Cognita enim istiusmodi vel unica combinatione (sive ex inspectâ numerorum cuborum tabella, sive sumpta aliqua ex iis quos indicavit Freniclus, sive quocunque demum modo habeatur) infinitos protenus alios exhiberi posse certum est. Si enim verbi verbi gratia $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$, erit & $a^3 e^3 + b^3 e^3 = c^3 e^3 + d^3 e^3$, quicunque assumatur cubus e^3, integer vel fractus. Similiter si vel unus aliquis cubus in duos alios dividi poterit, poterit &

quilibet cubus datus sic dividi; si enim verbi gratia $b^3 = c^3 + d^3$, erit & $b^3 e^3 = c^3 e^3 + d^3 e^3$. Addo & idem obtinere in quæstione à me proposita. Verbi gratia. Cum 16 & 25 partibus suis aliquotis additi æquales summas efficiant, id ipsum non minus facient $16 e^2$ & $25 e^2$ quicunque assumatur e^2, modo sint tum e^2, 16, tum e^2 25, numeri inter se primi. Quod nec D. Frenclum latere scio.

Fermatii Problema de *numero cubo qui partibus suis aliquotis additus faciat Quadratum*; in nuperis meis Mart. 4. datis, enucleatum dedimus, ut non sit cur de hoc hæreat vir Nobilissimus. Ne tamen causetur adhuc me methodos tantum exhibere, non autem & numeros, saltem non à suis diversos, libuit & hos sex cubos subjungere, qui partibus suis aliquotis additi faciant quadratos.

Cuborum radices.

2 × 3 × 5 × 13 × 17 × 31 × 41 × 191.
2 × 3 × 5 × 7 × 13 × 17 × 31 × 41 × 191.
3 × 3 × 3 × 5 × 11 × 13 × 17 × 31 × 41 × 191.
3 × 3 × 3 × 5 × 7 × 11 × 13 × 17 × 31 × 41 × 191.
17 × 31 × 47 × 191.
7 × 17 × 31 × 47 × 191.

Radices Quadratorum.

2 [*duodecies*] × 3 × 3 × 3 × 5 × 5 × 7 × 13 × 17 × 29 × 29 × 37.
2 [*quatuordecies*] × 3 × 3 × 3 × 5 × 5 × 5 × 7 × 13 × 17 × 29 × 29 × 37.
2 [*tredecies*] × 3 × 3 × 3 × 5 × 7 × 11 × 13 × 17 × 29 × 29 × 37 × 61.
2 [*quindecies*] × 3 3 × 3 × 5 × 5 × 7 × 11 × 13 × 17 × 29 × 29 × 37 × 61.
2 [*decies*] × 3 × 3 × 5 × 13 × 17 × 29 × 37.
2 [*duodecies*] × 3 × 3 × 5 × 5 × 13 × 17 × 29 × 37.

Addo etiam, horum secundum & quartum Frenicli quæsito de duobus cubis sub finem pag. 3. Inquisitionis suæ expositis, satisfacere.

Quid autem ego de hujusmodi Inquisitionibus numerosis censeam, jam antehac dictum est, nec repeto; & quam invitus huc adducar. Quod tamen, tum ut importunis duorum Clarissimorum virorum solicitationibus satisfacerem, tum præsertim ne tuis deessem mandatis, non erat refugiendum. At interim (tan-

torum

torum pace virorum dictum esto) non video quin ad solidum Matheseos profectum magis conducat, si Clarissimi viri, quæ sibi putant peculiaria, orbi literato methodice exponant, quam ut quæ ipsi se putant invenisse, proponant aliis (actum agendo) denuo invenire; nec minus inde quam hinc gloriæ sint reportaturi. Vale, Vir Nobilissime, & favere pergas, oro,

Oxonii Mart. 15. 165$\frac{7}{8}$. *St. Angl.*

Humillimo Tuo, Tibique obsequentissimo servo,

Joh. Wallis.

EPISTOLA XXIX.

D. Wallis *ad D. Vicecomitem* Brouncker.

Mittebam Tibi jam ante quatriduum, Vir Illustrissime, ad secundas D. *Frenicli* literas responsum, eodem die quo ipsas post prandium acceperam raptim exaratum, propter cursorem postero mane abiturum; neq; per tempus tum licuit te quicquam ea de re affari. quam ille nostra carpat, elevet, sugillet omnia, & contemptim habeat, tu vel non monitus animadvertis; quamque illud sine causa faciat, probe noveris. Quod sive genio Viri dandum, sive gentis, non inquiro. Mihi saltem negligenda videntur istæc omnia quæ huc spectant, ut quæ apud cordatos viros, saltem Mathematicos, nihil significant, quæque vel ipso judice, protinus evanescent quum primum literas nostras jam pridem scriptas viderit,(saltem si & illas *Ian.* 20 ad te datas transmiseris, quæ appendicem literarum *Dec.* 17. datarum fusius exponunt.)

Memineris, credo, quanto cum fervore, in literis primis, nostrum ad primores duas Fermatii quæstiones responsum repudiaverit; quod nempe *Unitatem* exhibendo nullum exhiberim vel *Quadratum* vel *Cubum*: Quam autem sibi parum constans sit, vides; cum literis secundis, (quasi cavilli sui oblitus) Unitatem ipse nunc pro *Cubo*, nunc pro *Quadrato*, jam iterum exhibeat.

Quanta

quantâ vero cum confidentiâ sibi persuadeat nos,neque duas illas, neque etiam Fermatii tertiam suo sensu solvere potuisse, vel etiamnum posse, quamque insultet plane, & triumphetur, & tanquam cum pueris colludat, neque nescis; neque, quam vana sit ea confidentia; cum eis omnibus satisfactum sit etiam ad mentem suam. Ego autem tacitus patiar, ut receptum ipse sibi canat, ubi viderit quam ante victoriam cecinerit triumphum. Poteris tamen novissimis meis literis, si forte nondum transmiseris, hos duos quos jam petit numeros subjungere, nequo forsan casu præcedentes literæ perierint.

313 × Q: 181938015856416c: † 1. = Q: 321881208291348 49:
151 × Q: 140634693: † 1. = Q: 1728148040.

Sed & vides,non modo de quæstionibus Fermatianis suspicacẽ esse Clar. Virum, verùm & de nostris. Avet utique audire, quid ipse ausim asseverare de quæstione à me obiter proposita,*de duobus quadratis, qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam*; securus forsan nos adeo rerum rudes esse ut ne nostras ipsi intelligamus. Neque id semel tantum primis literis, sed & secunda vice per Nobilissimum Digbæum exigit. Quid de hac re dictum sit, vides. quamquam enim ego illud ad solventis munus pertinere putaverim determinare, num proposita quæstio sit solubilis necne; quoniam tamen id à nobis sciscitatur; Respondi jamjam, *solubilem esse*; (addam etiam, si velit, solubilem *ad mentem suam*:) Ostendi insuper, non modo 16 & 25 à me exhibitos tales esse, sed & horum, per quemvis quadratum qui utrique primus sit, æquimultiplices, puta 16 × 9, & 25 × 9. item 16×49, & 25 × 49, &c.

Regeret fortasse, *solutionem hanc legitimam non esse, & quæ eruditum virum deceat.* At quidni? Nempe, quia facilis est, *nec aliud quam numerum in 2 vel 3, vel alium numerum ducere,* &c. At inquam, non ideo minus solvitur problema, quia *facile* solvitur. Et quidem, utut *dato* (ut loquitur) *triangulo rectangulo* 3, 4, 5, (hoc est, cujus litera sint ad invicem in ratione numerorum 3, 4, 5,) *aliud tale quæreretur* (nempe, cujus latera numeris rationalibus explicentur) non sufficeret fortasse *ipsius multiplum* 6, 8, 10, *exhibere* (quia nempe non esset hoc *aliud specie Triangulum*, sed illud ipsum

ipſum, quippe cujus latera ſunt in ratione numerorum 3, 4, 5, ſunt & eadem in ratione 6, 8, 10, &c.) Attamen expoſitis *tribus numeris* 3, 4, 5, quorum unius quadratus reliquorum quadratos ſimul æquet; ſi tales alii quærantur: rectiſſime reſpondebitur, & μαθηματικώτάτως, eorundem duplos, triplos, quadruplos, alioſve quoſvis æquimultiplos id ipſum præſtare; quippe hos *alios numeros* eſſe non eſt qui diffitebitur. Quique hoc reſponſum nollet, vel deberet illud interpoſita limitatione præcludere, vel imperfecte rem propoſuiſſe cenſendus erit, & parum ἀκριβῶς, (problemata ſiquidem Mathematica ſtricti juris eſſe, ſat novit vir Clariſſimus.) Certe qui porrectam facilis reſponſi anſam arripit neutiquam propterea culpandus erit, cenſendus potius parum oculatus ni cernat. Et miror quidem acumen Clariſſimi viri, ſi non & hoc agnoſcat. Ego certe, ſi id reſponſi porrigat ad problema noſtrum, (cum illud non præcluſerim ;) tantum abeſt ut pro juſta ſolutione non habeam, ut πάρεργα ſim habiturus ni fecerit. Proinde utique erit acſi quærenti numerum qui ſit per 2 & 3 diviſibilis, exhibeat 126, 132, &c. neglectis interim 6, & 12.

Sin ipſe porro interrogaveris, Annon adhuc alii exſtent quadrati (præter 16, 25, & horum æquimultiplos) qui rem eandem præſtent : Dicam aperte, vir Illuſtriſſime, Tibi ſaltem (& quidem, ſi Tibi videbitur, nè diutius illum ſolicitum teneamus, quin id ipſum *Freniclo* tranſmittas non repugno ;) alios adhuc eſſe, & quidem quamplurimos, utut eos exhibere minime teneamur. Ne tamen id gratis dixiſſe videar, quadrati, inquam, numerorum 8 × 3 × 37, & 2 × 19 × 29, partibus ſuis aliquotis additi eandem ſummam efficiunt; (quod & pariter intelligendum erit de iiſdem per quadratum quemvis qui ſit utrique primus multiplicatis.) Nempe

Quadratorum Radices.	*Quadrati partibus aucti.*
Q: 8 × 3 × 37.	127 × 13 × 3 × 7 × 67.
Q: 2 × 19 × 29.	7 × 3 × 127 × 13 × 67.
Similiter.	
Q: 3 × 4 × 11 × 19 × 37.	13 × 31 × 7 × 19 × 3 × 127 × 3 × 7 × 67
Q: 7 × 8 × 29 × 67.	3 × 19 × 127 × 13 × 67 × 3 × 7 × 7 × 31.

Sin

Sin queratur adhuc Freniclus, quod non ſint bini inter ſe primi, (quod tamen quid ad rem præſentem faciat, non video, ſaltem cum non ſint expoſitorum 16 & 25 æquimultipli, quos credo, ſolos, excluſos vellet,) en duos alios, inter ſe primos.

$$\begin{cases} Q: 2\times3\times5\times37. & 7\times13\times31\times3\times7\times67. \\ Q: 29\times67. & 13\times67\times3\times7\times7\times31. \end{cases}$$

Similiter & hos duos, primos item inter ſe.

$$\begin{cases} Q: 3\times5\times11\times19\times37. & 13\times31\times7\times19\times3\times127\times3\times7\times67. \\ Q: 7\times8\times29\times67. & 3\times19\times127\times13\times67\times3\times7\times7\times31. \end{cases}$$

Sin præter hoſce (atque horum multiplos ut dictum eſt,) plures quis deſideret, eadem fere methodo quærat licet (mutatis mutandis) qua in exquirendo cubo, qui partibus ſuis aliquotis additus quadratum efficiat, uſi fuimus. Atque hæc quidem ſi quando forte viderit Freniclus, acquieſcet (credo) & in poſterum mitius judicabit, (nec ſua ſibi tam putabit propria, quin eo poſſint alii pervenire:) uti & jam, ni fallor, Fermatius acquieſcit.

Duos autem quod ſpectat viros Nobiliſſimos, Fermatium & Freniclum, quibuſcum hactenus egimus, (& quorum utrumq; ſua forſan de nobis expectatio fefellit;) diſpari nonnihil genio (quantum ex literis conjicio) videntur conſtituti. (Dabis veniam utique, ſi pro qua Tu ſoles indulgentia favere, libere apud Te mentem eloquar.) Freniclum credo, Arithmeticis magis deditum, & quæſtiones particulares ſectantem, (quæ ad Æquationem univerſalē, & caſus omnes reſpicientē, vix aut ne vix reducantur) ſpeciatim quæ partes aliquotas ſpectant: (unde & Geometrica noſtra omnia intacta præterit:) Fermatium, Geometricis non minus exercitatum, & Canones generales, ſive univerſalia Theoremata inquirentem; (& qui fortaſſe virtutem in adverſario lubentius ſit agniturus:) Et quidem gravitatem Hiſpanicam, quibus eſt vicinior, magis fortaſſe ſapit alter; Gallorum alter alacritatem: Acutos ambos & ſummos viros lubens agnoſco. Nec tamen eſſe credo, (quicquid de me ſtatuatur) cur Gentem noſtram habeant deſpicatui;

ſpicatui; niſi quod minus fortaſſe ſimus jactabundi.

Vides, Vir Inſigniſſime, quanta tecum utar libertate, favore nixus Tuo, qui hanc permittat. Ne tamen libertatem videar in licentiam nimiam deflectere, ulterius importunus eſſe deſino, ubi me fuero profeſſus,

Oxonii, Mart. 19. 165 7/8. Stilo Angliæ.

Illuſtriſſime Domine,

Humillime Tibi obſequentiſſimum, atque obſervantiſſimum Tui,

Joh. VVallis.

EPISTOLA XXX.

D. Vicecomitis Brouncker *ad D.* Joh. Wallis.

Sir,

THeſe papers being ſent me by Doctor *Scarbrough*, a day ſince, are herewith preſented to you. I imagine (upon the ſight of them) that Mr. *Frenicle* hath by him a large Table of Numbers (Squares, Cubes, &c.) with their aliquot parts in Primes; which makes him ready for any ſuch ſolution, by almoſt a bare inſpection, according to the method you lately intimated, for the ſolution of theſe Problems, which is univerſally applicable to all of the like nature. My ſervice to your Lady, and let this confirm unto you, my being

6 April 1658.

Sir,
Your moſt faithfull friend, and humble ſervant

BROUNCKER

EPISTOLA XXXI.

D. de Frenicle *ad D.* Kenelmum Digby.

ADsunt quas à me postulâsti, Eques Honoratissime, Problematis Clarissimi Viri D. Wallisii solutiones quædam, non omnes quidem quæ mihi occurrerunt, cum tam multæ sint ut eas scribere non valuerim, cum enim ad paucos numeros unde ipsas decerperem, brevitatis causa, reducendum esse calculum æquum esse duxerim, nihilominus ex his paucis, tot & tam varias exurgere comperi, ut terminum quendam eis ponere coactus fuerim, quandoquidem ex prioribus solutionibus novas semper & varias sine modo provenire animadverti; unde factum est, ut ipsas ordine à me proposito exhibere tam cito non potuerim, quod Deo juvante quamprimum fiet. Tale autem erat Problema; *Invenire duos quadratos quorum singuli juncti cunctis suis partibus aliquotis conficiant eandem summam.* Et exemplum præbet quadratorum 16 & 25, quorum singuli juncti suis partibus faciunt 31. Quæruntur alii similes.

Quæruntur igitur bini tantum alii quadrati, & certe nullum negotium in hoc problemate inerit si multiplices quadrati admittantur. Attamen ipse Wallisius eos recusare non poterit: cum ad problema quoddam D. Fermat, circa numerum ex binis cubis compositum, qui in duos alios cubos resolvi debeat; ut est 1729, qui numerus cum ex duobus cubis 1 & 1728 sit conflatus, in duos tamen alios cubos 729 & 1000 resolvitur; cum, inquam, ad solutionem hujus facillimi problematis multiplices tantum acceptorum numerorum tradiderit.

Hâc igitur regula facillime D. VVallisii problema solvetur. Ducantur quadrati 16 & 25 in quemlibet alium quadratum imparem, per 5 non divisibilem, & exurgent alii duo quadrati quæstioni satisfacientes. Sic quadrati numerorum 12 & 15; 28 & 35; 36, 45: 44, 55: 52, 65, &c. rem præstant. Si enim quilibet quadratorum 144 & 225, partibu-

partibus suis jungantur, conficient summam 403. Quadrati 784 & 1225, faciunt 1767. Quadrati 1296 & 2025, faciunt singuli cum suis partibus 3751. Et sic de aliis. Sed hæc solutio est indigna Mathematico, nec talis est quæ proponi debeat, si hoc sensu accipiatur. Existimandum est igitur D. VVallisium aliud in suo problemate intendisse, & aliam solutionem expectasse, cum huic acquiescere non debeat. Proponatur igitur problema ut sequitur. Invenire duos quadratos inter se primos, quorum singuli juncti suis partibus faciant eandem summam.

Sequuntur latera quadratorum, qui quæsitum præstant. Si enim quadratus numeri 326 jungatur suis partibus, efficiet summam 187131: similiter & quadratus numeri 407 junctus suis partibus dabit eandem summam 187131. Hæc vero summa datur in partibus, post sex priores quadratorum copulationes.

Latera Quadratorum.	Summa.
326 407	187131.
627 749	658749.
1510 1809	4980801.
13066 14001	307464339.
10686 17531	314858271.
146311 147823	24126447513.
361232 497173	3, 31, 37, 49, 73, 127, 169.

111408 183169	3, 19, 31, 37, 49, 73, 169.
343952 507419	9, 49, 67, 73, 361, 367.
724152 1193941	7, 9, 19, 31, 37, 61, 127, 169.
&c.	&c.

[*Sequebantur hic aliæ binorum copulationes 27.*]

Plures alii bini quadrati reperiri possent, sed ad alia properandum est. Non solum enim bini quadrati partibus suis juncti eandem summam conficere valent; sed etiam trini, quatrini, quini, seni, &c. idem præstare possunt quadrati & inter se primi. Trini autem, quatrini, &c. quadrati dicuntur inter se primi quando nullus numerus hos omnes dimetiri potest. Sic quadrati 9, 16, 225, 324, hic dicuntur inter se primi, quia nulla est ipsis quatuor communis mensura, quanquam tres ex istis habeant numerum 9 communem mensuram.

Trini quadrati,

Latera Quadr.	Summa.
245828 294867 307285	133151753133.
&c.	&c.

[*Sequebantur aliæ ternorum copulationes 27.*]

Supersunt alii quamplures trini, quadrati quæstionem solventes jam quidem inventi, sed ob temporis inopiam nondum ordinati, ut Tibi, Vir Nobilissime, præberi possint; ut etiam quatrini, quini, seni, &c. quos quum parati fuerint cum prædictis trinis accipies; interim ut ex cunctis quos pollicitus sum unum saltem aut alterum exemplum habeas, hic quidem sunt appositi, reliquos expectaturus.

Qua-

Quatrini quadrati.

Lat. Quadr.	Summa.
2996.	
2508.	
3135.	20421219.
3745.	
&c.	&c.

[*Sequebantur tres aliæ quaternorum copulationes.*]

Quini Quadrati.

Lat. Quadr.	Summæ partes.
139954381710.	
165476277890.	
167186334770.	13,27,31,37,61,73,127,361,367,1093,2401,
198242772651.	
200291443443.	

Seni Quadrati.

Lat. Quadr.	Summæ partes.
79588991130.	
827180760012.	
95075206310.	
98813140244.	19,27,37,61,67,127,499,961,2197,2401.
103397595015.	
123516425305.	

Sequuntur alii quadrati tam bini quam trini, &c.

Sequebantur hic Quadratorum copulationes plures. Nempe Binorum, 6. *Ternorum*, 52. *Quaternorum*, 20. *Quinorum*, 3. *Senorum*, 5. *Tum Binorum*, 5. *Ternorum*, 5. *Quaternorum*, 7. *Quinorum*, 3. *Senorum*, 6. *Septenorum*, 4. *Octonorum*, 1. *Novenorum*, 1. *Iterumque Quinorum*, 1. *Senorum*, 3. *Septenorum*, 2. *Octonorum*, 2. *Novenorum*, 3. *Denorum*, 2. *Undenorum*, 1. *Duodenorum*, 2, *Tredenorum*, 2.

Quatuor-

Quatuordenorum, 1. *Quindenorum,* 1. *Novendenorum,* 1. *Quibus recensendis singulis supersedendam duxi, ne plura folia numeris implerem: Numerare tamen visum est, ne Authori videar injurius.*]

EPISTOLA XXXII.

D. *Joh. Wallis* ad D. Vicecomitem *Brouncker.*

Illustrissime Domine,

Accepi præteritâ septimanâ, favore tuo transmissas, quæstionis a me dudum propositæ, (de duobus quadratis qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam,) solutiones Frenicleas. Quibus percipio Nobilissimum Virum tum quæstionem illam solvisse, tum & pluris multo fecisse quam facturus ipse fuerim.

Solutio sua prima, eadem ipsa est cum prima mearum; quippe *Quadratus impar per* 5 *non divisibilis*, tantundem est atq; *quadratus qui sit utrisque* 16 & 25 *numerus primus.*

Solutiones reliquas, ex eodem plane fonte oriundas arbitror, atq; eadem plane methodo inventas (certe vix meliori,) cum mearum reliquis.

Quod autem tam numerosæ fuerint, non omnino mirandum erit modo tantum huic negotio laboris impendere non dedignetur. Cum enim præsto habeat, ni fallor, (quodq; tu etiam judicas,) tabellam satis amplam quæ quadratos, cubos, (fortassis & alias potestates,) numerorum primorum (ad usq; forsan 500 vel etiam ultra) partibus suis auctos, in partibus exhibeat; facile erit inde solutiones aliquot, modo a me nuper indicato, elicere quas quidem ubi aliquam multas nactus est, easdem varie componendo, commutando, commiscendo complures alias efformare posse virum sagacissimum, non dubitabit qui non ignorat quot mille modis septem aut octo literæ transponi possint, vel totidem campanæ ordines immutare. Quicquid sit, ego nullus dubito, quin mysterium illud aparuisse (quod a nobis factum est) unde & hæc & hujusmodi alia infinita dependent

dependent problemata, res Mathematicis non minus grata sit futura, quam, suppressâ methodo, istiusmodi vel mille numeros exhibere.

Ut autem quæstionem illam a me (non sibi) propositam solvat Freniclus, neutiquam inexpectatum erat. Cum enim Fermatianas ille jamdudum solverat, non dubitandum erat quin & meam, ab eodem principio dependentem eadem facilitate soluturus esset.

At mallem interim, ut id saltem laboris omisisset, quo quadratorum radices, in partibus proculdubio primû inventas, continue multiplicando in justos numeros redegit: quippe tanto facilius numeros ab illo exhibitos licuisset, si visum esset, examinare; quod jam non nisi retexendo id opus suum faciendum erit: quem quidem ego a me laborem vix impetrabo; nec enim tanti erit. Sed metuebat forsan ne si rem tam nude exposuisset, methodum inde suam edifcerem, quam mihi speraverat ignotam esse.

Quod autem ipsi visum est quæstionem a me propositam immutare, adjuncta limitatione, nempe, ut quadrati *exhibendi sint inter se primi*, (ne scilicet, expositis 16 & 25 rem præstantibus eorum multipli per quadratum quēvis qui sit utrisq; primus, magna facilitate exhibeantur,) quāquam ego limitationem illam plane non repudiam, attamen cūr ego illam non admodum necessariam existimem duo faciunt. Primum, quod exposita limitatio plures quam ad id opus esset quadratos excludat; cum certum sit, etiam cognitis 16 & 25 rem præstantibus, multos adhuc esse quadratos, etiam non inter se primos, qui nihilo facilius investigentur quam si ignorentur illi, vel etiam alij inter se primi. Et quidem, vel ipso judice, nihilo facilius exquirentur $8 \times 3 \times 37$, & $2 \times 19 \times 29$ vel etiam, $3 \times 4 \times 11 \times 19 \times 37$, & $7 \times 8 \times 29 \times 67$, a me exhibiti, utut inter se primi non sint, quam si essent. Alterum est, quod quamvis Freniclo res facilis sit; (ut qui noverit, *numerum compositum ex duobus pluribusve numeris inter se primis, partibus suis aliquotis auctum*, æqualem esse *composito ex numeris illis inter se primis, partibus suis auctis*, (quod præcipuum est in istiusmodi quæstionibus mysterium,) qui tamen id nesciverit; nihilo facilius assequetur numeros datorum æquimultiplices, ut negotio accommodos, quam alios inter se primos; qui autem illud sciverit

teras autem *Schotenianas* quod attinet, num Dni Væ visum sit ut nostris imprimendis (quod & mihi videtur haud incommodum, & ipse desiderat) interserantur, a Te exspecto; facturus omnia, quam fieri potest, ex voto tuo; ut qui sim,

Oxonii Apr. 13. 1658.

Illustrissime Domine,
Obsequentissimus Tibi, Tuique observantissimus

Joh. Wallis.

EPISTOLA XXXIII.

D. Franc. Schooten *ad D.* Wallis.

Clarissime Vir,

EXemplarium partis primæ Operum tuorum Mathematicorum, (quorum alterum mihi, Hugenio alterum à Te destinatum fuit) quod mihi destinaveras, rectè à Domino Thrommio mihi traditum est, quare & maximas ago gratias. Dolet etiam Exercitationes meas tibi non fuisse traditas, quarum exemplar, jam tunc cum prodierant, Typographo dederam, ut illud unà cum plurium exemplariũ copia Londinum mitteret, adqui ipsum inde ad te meo nomine Oxoniam amandaret. Gaudeo plurimum eas Tibi non malè placuisse, ut & quæ de Ratiociniis in Aleæ ludo in fine à Nobilissimo Hugenio sunt adjecta: cum tuum super istis judicium præ mille aliis luculentum nobis sit testimonium, quod tam restituendæ quam promovendæ Mathematicæ uterque operam non male collocaverimus. Præ aliis arridet mihi mutuus consensus, quem subinde in tuis ac meis evolvendis animadvertere licet, ut inter alia liquet in iis, quæ de Progressionibus uterque protulit, haud secus ac si communicatis consiliis scripta forent.

Quæ de Fermatii quæstionibus innuis, superiori anno omni-

bus Europæ Mathematicis ad solvendum propositis, quid nempe circa illas à me præstitum sit, paucis accipe. Misit sc. anno preterito die 26 Januarii Parisiis ad Academiæ Lugd. Batavæ Matheseos Professores Vir Illustrissimus D. Gulielmus Boreel, Confœderatarum Belgii provinciarum ad Christianissimum Galliæ Regem Legatus, literas, quibus duæ includebantur quæstiones numericæ hâc inscriptione: *Problemata duo Mathematica tanquam indissolubilia, Gallis, Anglis, Hollandis, nec non cæteris Europæ Mathematicis proposita, à Dno. de Fermat Regis Consiliario in Tolosano Parlamento, Castris Parisios ad D. Claudium Martinum Laurenderium Doctorem Medicum transmissa 3. Nonas Januar. 1657. accepta vero 12 Kal. Febr.*

Problema prius.

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum: ut numerus 343 est cubus à latere 7. Omnes ejus partes aliquotæ sunt 1. 7. 49. quæ adjunctæ ipsi 343 conficiunt numerum 400. qui est quadratus à latere 20. Quæritur alius Cubus ejusdem naturæ.

Problema posterius.

Quæritur etiam numerus Quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

quas ubi D. Golius receperat die 7 Febr. ejusdem anni, pridie sc. quàm Rectoratus Magnifici munus deponeret, me coram post aperuit die 11 ejusdem mensis. quibus tunc temporis sequentia respondi, atque prout illa Dno Golio prius communicaveram, rectâ Parisios die 17 Febr. ad memoratum D. Boreel una cum adjunctis literis transmisi; at duobus à me ejusdem argumenti adjunctis Problematîs, Dno. Fermatio iterum proponendis.

Responsum ad quæstiones à D. de Fermat, in Parlamento Tolosano Consiliario Regio, totius Europæ Mathematicis ad solvendum propositas.

Ad solvendam primam Quæstionem, *in qua Numerus Cubus est inveniendus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum,* quæro ab unitate 4, 7, 10, aut 13, pluresve numeros deinceps proportionales (augendo sc. illorum numerum continuè

per

per 3) qui simul additi conficiant Quadratum numerum; eritq; ultimus proportionalium Cubus quæsitus. Pro secundo autem proportionalium sumo semper alium atque alium primum numerum, incipiendo ab omnium minimis.

Sic quoniam proportionales 1. 2. 4. 8. 1. 3. 9. 27. 1. 5. 25. 125. additi faciunt numeros 15, 40, 156, qui quadrati non sunt: Hinc, prout pro secundis cujusque harum serierum assumpsi primos numeros 2, 3, & 5, assumo jam pro secundo primum numerum 7, habeoque proportionales 1. 7. 49. 343, qui additi faciunt 400, Quadratum numerum cujus latus est 20. Atque sic invenio 343 esse omnium minimum Cubum numerum, qui quæsito satisfacit, ac ipsissimus est, qui à D^no de Fermat est allatus. quoniam autem assumendo semper alios atque alios quatuor proportionales, utendo ad hoc ordine omnibus primis numeris à 2 usque ad 97, alium nullum præter jam ostensum offendi, laborem illos ulterius explorandi subterfugi [*quandoquidem compendiosiorem viam eos certò inveniendi agnoscere haud potui.* dele.



Eodem modo, cum utendo 7 proportionalibus 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729, &c. summæ 127, 1093, &c. non sint Quadrati, nec id ulterius, ob laboris molestiam, in 7 proportionalibus inquirere animus fuerit, declinavi simul operam idem in 10, 13, 16, pluribusve proportionalibus experiri. Ita ut hinc judicare ausus sim, quod, licet hujusmodi numeri (ut sane confido) sint infiniti, non tamen quis eos ultra certam multitudinem, utpute 5 aut 6 numero, facilè sit inventurus, ex ingenti illorum à se invicem distantia.

Ratio autem eosdem numeros sic infallibiliter inventum iri D. de Fermat latere non poterit, ubi intelliget me ad prædictos proportionales investigandos uti hujusmodi terminis Analyticis a^3, a^6, a^9, a^{12}, &c. aut etiam ad inveniendos numeros, habentes 15, 27, 39, 48, 51, 63, 69, aut 75, &c. partes aliquotas, me præter illos, præcedenti modo notatos, uti his a^3b^3, a^6b^2, a^9b^2, a^6b^6, $a^{12}b^2$, $a^3b^3c^3$, vel $a^{15}b^2$, a^9b^6, aut $a^{18}b^2$, &c. quippe qui huic negotio, ut sc. Cubis numeris inveniendis inserviant, utiles esse possunt. Sed cum ad inveniendos quæsitos numeros hi termini non nisi operosiores vias eosdem quærendi significent, haud facilè crediderim, ut quis

T 2 illas

illas ingressus eos felicius sit obtenturus. Cæterũ nihil hic addo, cum præter jam indicatos modos investigandi hosce numeros nulli existant, quibus ipsi certâ ratione inveniri queunt; nisi forte D. de Fermat*[*compendia nonnulla*] in faciendis adæquationibus (quæ certè mihi *[*neutiquam succedere voluerunt*]) excogitaverit, quæ molestiam hujus examinis non parum sublevent: quæ si communicaverit, rem sanè gratissimam facturus est.

** Loco horum verborum scribantur sequentia. Vide ad notum.*

2 

Similiter ad solvendam secundam Quæstionem, *in qua Numerus Quadratus quæritur, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum*, quæro 3, 5, 7, 9, 11, aut 13, pluresve numeros ab unitate deinceps proportionales (augendo sc. illorum numerum continuè per 2) qui simul additi faciant Cubum, sumendo pro secundo numerum quempiam primum. Omnino ut per $1.\ a.\ aa.$ $1.\ a.\ aa.\ a^3,\ a^4.$ $1.\ a.\ aa.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.$ &c. indicatur. Si enim hæc summa Cubus numerus fuerit, erit ultimus proportionalium Quadratus quæsitus. Utpote utendo ad hoc aa, a^4, a^6, a^8, a^{10}, &c. ad inveniendos numeros, habentes 2, 4, 6, 8, 10, &c. partes aliquotas. Aut etiam præter hos utendo $aabb$, ad inveniendos numeros habentes 8 partes, aliquotas, aut a^4bb ad 14 partes, aut a^6bb ad 20 partes, aut a^4b^4 ad 24 partes, aut $aabbcc$ vel a^8bb ad 26 partes, &c. Sed quoniam & hi posteriores termini non nisi difficiliores modos quærendi hosce quadratos numeros significent, vix credere ausim, quempiam utendo illis ad optatum finem felicius perventurum.

Atque cum hi omnes modi existant, quibus quæsitos numeros certò obtineri posse evidenter perspexi, modo quis ad hoc, laborem examinandi, ut supra, ordine omnes primos numeros (incipiendo ab omnium minimis) non defugiat, sperare volo hic à me Clarissimi Fermatii desiderio penitus fuisse satisfactum.

Dabam Lugd. Bat.
die 17 *Febr.*
Anno 1657.

Hæc ego
Fr. à Schooten, in Academia
Ludg. Bat. Math. Professor.

Sequuntur duo Problemata Dno. de Fermat rursus proposita, ejusdem argumenti.

Primum Problema.

Invenire duos Cubos numeros, qui simul additi conficiant Cubum. Vel, si eosdem reperire non obtingat, ostendere problema esse impossibile.

Secundum Problema.

Ostendere, utrum *perfecti numeri aliâ ratione quàm ab Euclide traditur* prop. ult. lib. 9. Elem. hoc est, absque progressione dupla, *sint inveniendi nec ne.*

Atque hæc quidem, quæ tunc respondi atque vicissim reposui.

In his autem quæstionibus enodandis id solummodo propositum habui, ut modum, quo solvendæ essent, Autori indicarem, quod sane me fecisse Tibi, Vir Perspicacissime, facile erit cognoscere, cum nullum dari numerum deprehendes, qui aliquam prædictarum conditionum (ut ex Sectione tertia mearum Exercitationum colligere licet) non subeat, aut per allatos modos inveniri non possit. Neque enim tanti ipsi numeri mihi visi sunt, quin ratio quâ iidem certò essent inveniendi Dno Fermatio sufficeret. Atque hoc est, quod præsertim etiam spectavi in binis adjunctis Problematis, ut, si quæsiti à me numeri, non offenderentur, saltem ostenderetur Primum ex illis Problematibus esse impossibile, & secundum aliâ nullâ ratione, quam ab Euclide ostensum est, solvi posse. Ad hæc vero omnia nil quicquam, quod sciam, ab ipso Fermatio mihi responsum est, aut certe nihil ad me pervenit; neque etiam ullatenus ipsum urgendum duxi, ne magnam videlicet gloriam ex solutione Problematis, quod nullius usus fructusve apparet, aucupari viderer. Ita ut nesciam utrum D. de Fermat mea receperit nec ne, & si receperit quale de iis judicium ferat. Fateor compendia, quæ ad operis sublevamen haud parum profutura credidi, illo quidem tempore mihi in mentem non venisse:

nisse: quocirca tunc ipsi Fermatio significavi (cui illa dubio procul præ aliis constabant) si generalia quædam compendia circa hæc cognosceret, rem gratam facturum esse, si nobis communicare illa dignaretur.

Postquam Fermatii quæstiones superiori modo solvissem, visum fuit illas etiam Clarissimo Domino Huddenio communicare atque solvendas proponere, qui tunc temporis Ultrajecti morabatur, ac die 23 Febr. tale mihi super eas responsum dedit.

" Quantum ad quæstiones à D. Fermatio propositas, illa-" rumque à te inventam solutionem, fateor illas quidem mihi " non displicuisse, sed non perinde rationem, quâ mihi persua-" dere conaris, ut & ego earundem solutioni quærendæ operam " darem: quandoquidem judicio meo, magis necessaria ac uti-" lia minus necessariis ac utilibus anteferenda sunt. Si enim ali-" quod mihi in excolenda Mathesi otium supersit, confido id " non tantum à me in longè utilioribus impendi posse, sed & " simul generalioribus ac jucundioribus, quæque ejusdem " cultori ampliorem laudem polliceri videntur. Quocirca cum " id à me impetrare non potuerim, ut solutioni horum Proble-" matum quærendæ incumberem; volui tamen nonnihil sepo-" sitis cæteris meis studiis tui solius causâ hesternum diem iis " impendere, forte, ut, si tuum ad eas responsum nondum " Parisios amandasses, quæ à me ad sublevamen operis inventa " essent, tibi impertirem.

" Regula igitur quam ex multis selegi atque ad solutionem " prioris quæstionis adhiberem, *in qua cubus numerus est inveni-" endus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadra-" tum*, talis est: Sumatur quadratus (incipiendo ab omnium " minimis) cujus duplum — 1 sit numerus primus, à quo " ablato 1, si reliquum multiplicetur per quadratum assum-" ptum (seu, quod idem est, per majorem hujus primi numeri " semissem) & productum adscitâ unitate deveniat qua-" dratus: erit prædictus primus numerus latus cubi quæ-" siti.

Exempli

Exempli gratiâ.

Radix	□	*Prim. num.* 2□ −1	*Prim. num.* −1		□, *vel major semissis pr. num.*		
2	4	7	6	*per*	4	*dat*	24, *cui add.* 1, *fit* 25. *Ergo* 7 *est latus Cubus quaesiti.*
3	9	17	16	*per*	9	*dat*	144, + 1
4	16	31	30	*per*	16	*dat*	480, + 1
5	25						
6	36	71	70		36		2520, + 1
7	49	97	96		49		4704, + 1
8	64	127	126		64		8064, + 1
9	81						
10	100	199	198		100		19800, + 1
11	121	241	240		121		29040, + 1
12	144						
13	169	337	336		169		56784, + 1
14	196						
15	225	449	448		225		100800, + 1
16	256						
17	289	577	576		289		166464, + 1
18	324	647	646		324		209304, + 1
19	361						
20	400						
21	441	881	880		441		388080, + 1
22	484	967	966		484		467544, + 1
23	529						

non efficiunt □.

" Quæ hic patent loca primos numeros non admittunt, ut " requiritur juxta regulam; sed, quod forsan miraberis, ipsi om- " nes divisionem per 7 vel 17 recipiunt. Porrò si bene computa- " vi, liquet hic in numero 1150, 1150, 1150, seu 1520875000 " unum tantum cubum reperiri, videlicet 343 (eorum nem- " pe, qui non præter tres partes aliquotas finunt, cum pro iis so- " lis hæc regula sit accommodata): Siquidem primus nume- rus, quem deinceps inveniremus, major est quam 1150. Cubi vero 343 latus 7 per primum quadratum est inventum, atque "hic

" hic cubus ipsissimus est ille, qui ab Autore fuit ostensus, quæsi-
" to satisfaciens.

" Cum igitur jam hæc tua verba perpendo : *Quoniam autem* " *assumendo semper alios atq; alios quatuor proportionales, utendo ad hoc* " *ordine omnibus primis numeris à 2 usque ad 97, alium nullum præter* " *jam ostensum offendi, laborem illos ulterius explorandi subterfugi,* " *quandoquidem compendiosiorem viam eos certo inveniendi agnoscere* " *haud potui*, nullus dubito quin hac via facilius quis ad quæsi- " tum sit perventurus, quoniam usque ad 1151 circiter intra " sesqui-horam perveni; & si quidem catalogus tuus primorum " numerorum mihi ad manum fuisset, dimidio adhuc fer- " mè labori parcere potuissem. Quocirca facile tibi erit, si " operæ pretium ducas, ulterius id in majoribus numeris ex- " periri.

" quo pacto autem hanc regulam seu canonem invenerim, se- " quens calculus indicabit.

" Esto a^3 cubus numerus inveniendus, & $a \propto$ alicui primo " numero.

" Hujus autem cubi partes aliquotæ sunt 1. a. aa, quæ additæ " ipsi a^3 simul faciunt $1 + a + aa + a^3$. Id quod requiritur æ- " quale quadrato.

" Ponatur itaque $1 + a + aa + a^3 \propto \overline{1+a}$ in b $\Big\}$ mult.
$\overline{1+a}$ in b

" div. utrinque per $1+a$. $1 + aa \propto \overline{1+a}$ in bb.

Et fit $\dfrac{1+aa}{1+a} \propto bb$, seu $a - 1 + \dfrac{2}{a+1} \propto bb$.

" quoniam autem a primus numerus esse debet, poterit " $\dfrac{2}{a+1}$ dividi per 2. quæ quidem fractio si ad integrum nu- " merum $a - 1$ addatur non potest producere quadratum, ut " requiritur, nisi & simul ejus denominator $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ sit nume-

rus

"rus quadratus. Unde sat magna facilitas elici potest, quan-
"doquidem primo loco investigare sufficit $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \infty \square$, id est,
"$a + 1 \infty 2 \square$, seu $a \infty 2 \square - 1$. Ita ut hinc appareat cur in
"Canone dicam, *Sumatur quadratus, cujus duplum* — 1 *sit numerus*
"*primus*; quippe eum qui hac caret proprietate prætermitto,
"utpote proposito non inservientem. Hac inventione quærendi
"laborem plurimum sublevare licet, non tantum in a^3, verum
"etiam in cæteris.

"Atque his, vir Amicissime, in tantum tempus meum
"est præterlapsum, ut vix de alterius Problematis solutio-
"ne tibi communicatu dignum quid habuerim, ut nec de aliis
"viis hujusmodi cubos investigandi quam per a^6, a^9, a^{12}, &c.
"aut $a^3 b^3$, $a^6 b^3$, &c. quarum partes aliquotæ non sunt pro-
"portionales, ut in prioribus.

Hinc cum literę meæ jam tunc Parisios essent amandatæ, atque ex superioribus didicissem intra 1 & 1520875000 nullum reperiri cubum præter jam ostensum 343, etsi quis ad eos investigandos jam faciliori via (ipsius sc. a^3) fuisset usus; & cæteras ipsarum a^6, a^9, &c. aut $a^3 b^3$, $a^6 b^3$, &c. non nisi difficiliores esse existimandas, jure ab ulteriori horum numerorum disquisitione ego juxta & D. Golius (qui & horum Problematum solutionem sibi investigandam proposuerat) abstinendum esse duximus, bonasque horas Mathematicas alibi potius esse collocandas.

Paulo post illud tempus, 9 sc. die Martii, Hagâ accepi literas à Nobilissimo Hugenio, quibus includebantur aliæ à Dno Mylon J. Cto Parisiis ad me datæ, una cum adjuncta pagella, quam repetiit Hugenius, hæc ad me scribens: *Ecce tibi à Mylonio nostro literas, itemque pagellam quam me quoq; inspicere voluit, quam, ubi commodum erit, remittere te mihi velim, propter quæsita D. de Fermat.* Quæ quidem pagella hæc continebat.

Proposuit D. de Fermat omnibus Arithmeticis per Dominum Digby.

Invenire Cubum qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum.

Ut numerus 343 est Cubus à latere 7. omnes ejus partes aliquotæ sunt 1, 7, 49, quæ adjunctæ ipsi 343, conficiunt numerum

V 400,

400. qui est quadratus à latere 20.

Quæritur alius Cubus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus Quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Monf. de Frenicle a resolu ces quæstions, & Mr. Martin qui en a les solutions les fait imprimer, à ce qu' on m'a dit.

Depuis peu Mr. de Fermat a escrit cecy a Mr. de Frenicle.

'Tout nombre non quarrè est de telle nature, qu'on peut 'trouver infinis quarrès, par lesquels si vous multipliez le nom- 'bre donnè, & si vous adjoustez l'unitè au produit vienne un 'quarrè.

'Exemple. 3 est un nombre non quarrè, lequel multiplie par '1, qui est quarrè, fait 3, & en prenant l' unitè fait 4. qui est 'quarrè.

'Le mesme 3 multipliè par 16, qui est quarrè, fait 48. & en 'prenant l' unitè fait 49, qui est quarre.

'Il y en a infinis, qui multipliant 3, & prenant l' unite, font 'pareillement un nombre quarre.

'Je vous demande une reigle generale, pour, estant donné 'un nombre non quarré, trouver des quarrés, qui multipliés par 'le dit nombre donné en adjoustant l'unite fassent des nom- 'bres quarrés.

'quel est, par exemple, le plus petit quarré, qui multipliant '61, en prenant l'unite fasse un quarré.

'Item, quel est le plus petit quarré, qui multipliant 109, & 'prenant l'unité fasse un quarré.

'Si vous ne m'envoyez pas la solution generale, envoyez moy 'la particuliere de ces deux nombres, que j'ay choisis des plus 'petits, pour ne vous donner pas trop de peine.

'Apres que j'auray receu vostre responce je vous propose- 'ray quelque autre chose. Il paroist sans le dire que ma pro- 'position n'est que pour trouver des nombres entiers, qui satis- 'fassent à la question, car en cas de fractions le moindre Arith- 'meticien en viendroit à bout.

A quoy M. de Frenicle a envoyé l'ordre qu'il tient pour re- soudre ces questions, dont le calcul est extremement long.

Ubi jam Hugenio & Mylonio super hæc rescripseram, atque D.Fre-

D. Freniclium meo nomine per Mylonium curaveram officiosissime salutari, misi simul pag. 426. tunc impressam mearum Exercitationum, è qua pateret quam ipsius fuerim studiosus; adeò quidem ut in hisce quæstionibus, in quibus propter alia studia minus temporis impenderam, ipsi libenter palmam me concedere, testarer. Quibus cum respondisset Mylonius die 12 Aprilis, misit mihi postmodum ejus responsum Hagâ Hugenius die 21 ejusdem mensis, in quo inter alia hæc regessit.

'I' envoye à Monf. de Zuylechem les pensées de Monf. Frenicle, touchant les Propositions Numeriques de Monf. de Fermat & vos solutions, & le prie de vous en faire part. Dictæ autem hæ Freniclii cogitationes erant tales.

'Monf. Frenicle trouve que c'est plutost fait, d'examiner tous les Cubes de suite, pour voir ceux qui satisfont; qui est la question proposée par Monf. de Fermat, que de servir de la methode de M. Schooten. Neantmoins pour s'en servir il donne ce Theoreme.

'Il n'y a aucune puissance dont la racine soit un nombre premier, & l' exposant un nombre impairement pair, qui puisse avoir un quarré pour la somme de ses parties. Donc M. Schooten doit exclure ces nombres de sa Methode.

'Il en peut encor exclure beaucoup d' autres, sçavoir ceux ou les proportionelles sont en multitude impaire, car leur somme ne sera point un quarré, & n'a pas besoin d'estre examinée, si le nombre de la proportion n'est pareil a 79, 199, & autres dont il se trouve fort peu, se trouvant plusieurs milliers de nombres ou il n'y en a que 5 ou 6.

'D' avantage le second nombre de la proportion continuelle, doit estre un de ceux de cette progression, & entre ceux la il n' y aura que ceux qui auront ces deux proprietez.

'La 1. Que ce soit un nombre premier.
'La 2. Qu'il soit moindre de l' unité qu'un double quarré.

'Or par les letters finales & autres proprietés des doubles quarrés on peut voir aisement qu'il n'y en a aucune qui puisse satisfaire outre 7. si le cube n'a plus de 60 lettres. Il se trove

1.	*En cette progression*
7. a	*six fois* a — 1 *aquatur* b.
41. b	6 b — a *aquatur* c.
239. c	6 c — b *aquatur* d,
1393. d	*&c.*
8119.	
47321.	

Les nombres de la precedente progression se trouvent encore autrement par la seule addition, comme en celle, qui suit, en laquelle il n'y aura que ceux de la colomne h, *qui sont vis à vis des impairs de la colomne* g, *qui soient utiles.*

g	h
1	1
2	3
5	7
12	17
29	41
70	99
169	239
408	577
985	1393
2378	3363
5741	8119

La construction de cette table est aisée par addition.

Car. 1 + 1 *font* 2 *en* g
2 + 1 *font* 3 *en* h
3 + 2 *font* 5 *en* g
5 + 2 *font* 7 *en* h
7 + 5 *font* 12 *en* g
12 + 5 *font* 17 *en* h
&c.

'par ces deux proprietés qu'il n'y a q; deux nombres a examiner s'ils sont doubles quarrés pour aller jusques a la racine de ce cube de 60 lettres. Et cet examẽ est d'adjouster 1, & prendre la racine quarrée de la moitié, car les autres ou sont composez ou leurs finales mõstrent qu'ils ne sont pas doubles quarrés — 1.

Monsieur Frenicle propose ce Probleme.

'Trouver un nombre triangulaire, dont le sextuple + 1 soit nombre cube.

'Ie escris de l'autre part ce que j'ay pu tirer sur le champ de Monſ. de Frenicle, touchant les Propositions Numeriques de Monſ. de Fermat, je vous supplie d'en faire part a Monſ. Schooten, &c.

'Voicy la solution de Monſ. de Frenicle pour les nombres suivants.

Pour 13 C'est le quarré de 649
pour 19 c'est le quarré de 170
17 ———— q. de 33
21 ———— q. de 55
23 ———— q. de 24
29 ———— qq. de 99

31 ———— q. de 1520
33 ———— q. de
37 ———— q. de 73
41 ———— q. de 2049
43 ———— q. de 3482
47 ———— q. de 48
53 ———— q. de 66249
59 ———— q de 530
61 ———— q. de 1766319049. 'Lequel quarré estant 'diminué de 1 'donne le quarré 'de 226153980. 'Or le quarré

pour 109 il n'y en a point au dessous de 25 lettres.

pour 127 -- c'est le q. de 4730624.

'qui satisfait a 61 a 19 lettres, quoy qu'il n'estoit besoin pour 'le trouver par la Methode de Monf. Frenicle que de 5418. '11418. 23718 & 29718.

Super hæc verò Hugenius sequentia adjecit.

'Quæ ex mente D. Frenicle de quæstione à Fermatio propo'sita in meis literis Mylonius adscripsit examinanda tibi relin'quo. Magna quædam compendia in inveniendis cubicis istis 'numeris videtur adferre, quantaque fortasse non putaras in'veniri posse. Sed quibus rationibus nitatur inquirere operæ 'pretium est. Alteram quæstionem quam Fermatius proposue'rat de inveniendo quadrato, qui in datum numerum ductus 'adsumpta ad productum unitate faciat quadratum, ego solve'ram, canone quodam ad hoc tradito. Atque existimo eodem 'usum esse Freniclum ad inveniendos numeros, quos mihi Mylo'nius mittit, sed immensi fuit laboris, quemque ego nequaquam 'suscipere vellem.

Aliquanto post, die nempe 18 Maii, Mylonius hujusmodi ad me dedit literas.

'*Monsieur*,

'I'ay fait voir à Monf. de Frenicle vostre petit papir impri'mé dont il vous remercie. Un de ses amis veut icy faire im'primer le deffi de Monf. de Fermat & la solution dudit Sr. de 'Frenicle. Il y pretend joindre la vostre avec les abregez, ex'clusions, & Theoremes de son ami. I'ay prié que l'on ne le fist

pas

'pas sans sçavoir vostre volonté, prenez donc la peine de me
'mander par la voye de Monſ. de Zuylechem (puis qu'il a
'cette bonté) si vous trouverez bon d'estre nommé, ou non;
'ou si vous ne desirez pas que vostre solution soit imprimée.
'Ie tascheray de faire suivre en cela vostre intention, e-
'stant, &c.

Subtus sequentia habebantur.

'Monſ. de Frenicle vous envoye ces Theoremes sur vostre
'deuxiesme question.

1.

'Pour les nombres pairs parfaits il n'y en a aucun que ceux,
'qui se trouvent par la Methode donnée par Euclide.

2.

'Pour les impairs, s'il y en a aucun, il doit estre multiple d'un
'quarré par un numbre premier pairement pair plus 1.

Theoreme.

'Il n'y a aucun quarré, qui multiplié par 19 surpasse de
'l'unité un quarré multiple par 7.

His sequentes literas reposui.

'Monsieur,

'Puisque vous avez eu la bonté de me mander, qu'un des amis
'de Monſ. Frenicle veut faire imprimer le defi de Monſ. de Fer-
'mat & la solution dudit Sr. de Frenicle, & qu'il pretend d'y
'joindre aussy la mienne avec ses abregez, exclusions, & Theo-
'remes, que Monſ. de Frenicle à inventé pour la racourcir; je
'n'ay pas voulu manquer de vous en remercier & de vous escrire,
'que tout ce qu'on en fera me sera agreeable, soit qu'on l'im-
'prime ou non. Car n'ayant employé gueres de temps pour la
'chercher, & remarquant qu'il eut fallu faire grande operation
'pour trouver ces nombres requis; je me suis contenté d'y en-
'seigner seulement les chemins, par lesquels je voyois claire-
'ment que les mesmes nombres, s'ils y avoient plusieurs tels, se
'deussent trouver infalliblement, en cas qu'on voulust prendre
'la peine d'examiner generalement de suitte tous les nombres
'qui y pourroyent aucunement servir, sans penser particuliere-
'ment quels nombres en fussent exempts, de mesme comme a

fait,

'fait Monſ. de Frenicle. De ſorte que ma Methode n' eſtant
' que Analytique, c'eſt à dire, expliquant comment on peut par
' le moyen de l' Algebre decouvrir les chemins, par leſquels ces
' nombres peuvent eſtre cherches, je ſerois d' avis, que, ſi on la
' veut faire imprimer, l' on y adjouſtaſt ces mots: *Ratio Ana-*
' *lytica inveſtigandi hoſce numeros, inventa à Franciſco à Schooten*, ou
' bien, *Sequitur modus inveſtigandi hoſce numeros per Algebram, ſicut*
' *eum adinvenit Fr. à Schooten*. Ce qui la feroit plus recommen-
' dable, ſeroit, d'y adjouſter de plus les abbregez, excluſions,
' & Theoremes de Monſ. de Frenicle, affin que cela ne ſemble
' pas eſtre trouvé pour rien, mais y ſerve pour embelliſſement & *Vide ſupra.*
' plus grande perfection de cette matiere. Ie vous en laiſſe tout 
' le pouvoir. Dans ma ſolution je voudrois bien, que ces
' mots en fuſſent effaces: *quandoquidem compendioſiorem viam eos*  2
' *certo inveniendi agnoſcere haud potui*. Et au lieu de ces mots:
' *niſi forte D. de Fermat compendia nonnulla in faciendis adæquationi-*
' *bus*, &c. j aymerois plutoſt ceux cy: *Niſi fortè D. de Fermat ge-*
' *neralia quædam compendia in faciendis adæquationibus (quæ certè mihi*
' *nequaquam occurrerunt) excogitaverit*, &c. En finiſſant je de-
' meure, &c.

De Leyde ce
29 de May,
1657.

Quibus ita ſe habentibus, in lucem tandem exiit tractatus hoc titulo: *Solutio duorum Problematum*, &c. quem eundem opinor cum illo à Te mihi in tuis indicato; de quo igitur par exemplarium curâ ſupra memorati Dni Legati Pariſiis die 26 Octobris ad nos tranſmiſſum eſt, alterum mihi, alterum Hugenio deſtinatum. Hunc ubi inſpexi, miratus ſum Autoris faſtum, cum in ipſo exordio ad D. Digby in hunc modum ſeſe efferre non erubuerit.

En tibi vir Illuſtriſſime,

Lutetia præbet quam neque Angli tui, neque Belgæ uſque modo præſtare potuerunt Problematum ſolutionem; geſtit Gallia Celtica palmam Narbonenſi præripere, &c, aliaque paſſim his ſimilia. quaſi vero Reipub-
licæ

licæ interſit hoſce numeros noſſe, & unuſquiſque hanc ſolutionem tanti facere teneatur, ut nec habeat in quo tempus utilius collocet. Ubi titulum intuebar, non potui non omnino indigne ferre, tractatus hujus Autorem in ſolutionem meam inquiſitionem aliquam conſcribere: ſiquidem *Inquiſitionem* nullam è Gallia unquam expectaveram, ac etiam autorem cordatiorem putabam, quam ut in eum, qui nullam ipſi, quod ſciam, offenſam dederat (ſed contra ſe illius ſtudioſiſſimum oſtenderat) circa rem adeo indifferentem parvique momenti tale quid moliretur vel fieri pateretur. Paulò poſt quam tractatus hic ad manus meas pervenerat, à Cl. Hugenio Hagâ literas recepi, cui, ut ſupra dictum fuit, alterum illius exemplar Pariſiis tranſmiſſum fuerat, quibus inter alia hæc ad me ſcripſit: *Problemata Freniclii non dubito ad te quoque ab Autore miſſa eſſe. Quæ cum aſpicio, demiror ſane diverſa hominum ſtudia.* Quod autem Autor in eo deinde innuit pleroſque Mathematicos tam in Anglia quam in Batavia horum Problematum ſolutioni operam dare, certè quantum ad Batavos, vix novi quempiam, qui operæ pretium duxerit ea aggredi; quin imò ex verſatioribus, quibus illa propoſueram, ſicut nullum eorum uſum aut fructum agnoſcebant, etiam nullum offendi, qui gloriam inde reportandam magni fecerit, adeoque ſolutionis inveſtigandæ laborem ſubire voluerit.

Cum itaque, Vir Præſtantiſſime, rogas, quam candide mecum ea in re actum fuerit, opinor id Tibi jam ex ſuperioribus facile eſſe colligere; quæ ideo prolixius quam forte res ipſa exigere videtur exponere Tibi viſum fuit: præſertim cum ſolutiones tuas & literas, quæ de hoc negotio tecum interceſſêre (ſicut ex tuis intelligo) typis mandare decreveris. Exiſtimo enim & hæc, vel aliqua certè ex his, ejuſmodi eſſe quæ ad propoſitum tuum ac narrationem faciant. Cui propterea ſi inſerenda Tibi videbuntur, facies id quidem me haudquaquam invito.

Quæ de Saturni Luna ac facie animadvertiſti, Hugenio communicare operæ pretium duxi, è quibus diligens atque eximium tuum in his rebus ſtudium agnoſcat, quibus ipſe quoque, ut opinor, nunc ſedulo intentus eſt. Sed

ne

ne nimium diu Te detineam, finem jam hisce impono, fausta omnia ac prospera Tibi apprecatus. Vale.

Dabam Lugd. Bat. die 18 Martii. Anno 1658. St. Greg.

Tui amantissimus pariter, atq; observantissimus,

Fr. à Schooten.

Gratulor, ea, quæ de Pappi textu ex Cod. Græcis MSS notasti, conjecturis meis ad unguem respondere. Hæc enim si ante scivissem, operam dedissem ut genuinus hic Pappi sensus una fuisset impressus. Quod nunc in proximam editionem, si forte illa aliquando videbitur iteranda, reservandum est. Interim pro his gratias Tibi habeo, atque Deo omnium largitori ex animo te comendo. Iterum vale.

EPISTOLA XXXIV.

D. Vicecom. Brouncker *ad D.* Joh. Wallis. *cui includebantur sequentes quatuor.*

SIR,

BEing in haste, I shall onely present you this inclosed as it came to my hands, and tell you, that having fully resolv'd, in his own sence, that Proposition which he seem'd to esteem as the more difficult, I looke not upon my selfe as any way obliged to endeavour the solution of those other which he sends upon a presumption that the former was beyond my reach. Otherwise I think those not so difficult, but that if I pleas'd, and had the leasure, he might be fully satisfied herein also, by

May 1. 1658. *Sir,*

Your most faithfull humble servant.

BROUNCKER.

What is said concerning your selfe, I thinke merits not the least reply. The Reader doubtless willbe fully satisfied with what hath been already said.

EPISTOLA XXXV.

D. Kenelmi Digby *ad D.* Vicecom. Brouncker.

My Lord,

I Received two daies since the Letter your Lordſhip hath been pleaſed to write me of the 13 *March*, together with two to me from Doctor *Wallis*, and one from him to your Lordſhip. I give you moſt humble and hearty thanks for yours, which I embrace with exceeding gladneſs, joy, and reſpect; in the firſt place, for your exceſſive civility and kindneſs to me; and in the next, for your noble and learned ſatisfying Mounſ. *Frenicles* requiſition. Now, neither he, nor Mounſ. *Fermat*, will have any more to cavil at, either your Lordſhip or Dr. *Wallis*; unto whom I have written at large (conſidering my inability of writing much at preſent) and doe preſume to beg your favour in conveying my Letter to him; which I leave open, that if you pleaſe you may caſt your eye over it. In earneſt (my Lord) I congratulate with my whole heart the happy Starrs you are born under, that in ſo great a birth and quality, furniſh you alſo with thoſe excellent parts of the mind, as the eminenteſt that make Study and Learning their taske, may juſtly envy you for. By my encloſed, your Lordſhip will ſee how lately I received Dr. *Wallis* his former Letters. When you ſee Doctor *F.* I pray you reproach him for his unſeaſonable caution in keeping them ſo long by him. If I were not quite wearied out (I am yet ſo weake) with writing my Letter to Dr. *Wallis*, your Lordſhip ſhould not thus eaſily be delivered of my troubling you at this time; which for my mentioned reaſon, I muſt not now further enlarge, but humbly kiſſing your hands, I reſt,

Paris, 4 May 1658.

My Lord,

Your moſt humble and moſt obedient ſervant,

KENELM DIGBY.

EPISTOLA XXXVI.

D. Kenelmi Digby ad D. Joh. Wallis.
præcedenti inclusa.

Most worthy and honoured Sir,

THe letter you did me the favour to write to me the 26. of *December* last, came not to my hands till very lately, together with one that you wrote about the same time to my Lord *Brounker*; who it seems delivered them to Dr. *F.* to send me, by reason that Mr. *White* was then out of Towne: And the Doctor (how ever it came to passe) kept it dead by him, till I hearing of it several moneths after, did write to him for it, and withall desired him to go to my Lord and accuse himself of his omission (thereby to disculpe me of any) and immediately to send it me. He thereupon remitted it to me by the next Post, and told me he had been with my Lord to take from me all blame of negligence or want of respect. I professe unto you as I do also to all men else, when the occasion presenteth it self, that I do much admire the great stock you have, which furnisheth you (as appeareth by your sudden replies) with such a strange abundance of matter, that in a nights space you deliver out more than would employ another man whole Months. St. *Hierome* is justly admired for dispatching in one night the Treatise he hath left us against *Jovinian*. But your numerical answers, are of a subject, and require a method of handling it, of a far more difficult strain than his was; for, that may be compared to a thrid that is currently and easily spun out of the flax that lyeth ready for it, and of it self slideth and presseth into the thrid by the facile labour of bare turning the wheele. But every stroke of your Pen in this occasion requireth a new hewing of a regular stone out of the whole Quarry, to compose the Arch you build; in the contexture of which, and in every least particel of it, there must be a most exquisite and strict exactnesse, even to an invidual. Therefore it justly deserveth admiration to

see with what ease, or rather sport you acquit your self of these Herculean labours. VVhich when I look upon under that notion, truly I am not a little troubled that I should have any share (though but meerly as a passive instrument) in drawing them upon you. But when I view them by other lights, & which indeed are the true ones (as namely, how little they cost you, and how much the world will be the better for them, and how much they will redound to the honour of our Nation) then I confess I am glad of the opposition that hath been made you; not that I approve the tartness that sometimes accompanyeth disputes, and especially in Mathematical ones (where demonstration onely is considered) the parties should attend onely to the plain matter in hand. But the course and stile of this country furnisheth them with an excuse, where disputants use to be very tart, or rather froward (according to my sence) with one another: And if you were not a stranger, and one that in effect they have great value for, they would have been more familiar with you; for they account all that they say in this kinde, but a fair and usual familiarity, not at all injurious or offending. Monsieur *Fermat* did send me a Letter some time agone, in which he reflected upon some points in some former Papers of yours; the communicating whereof to you, he referred to my discretion: And as long as that liberty remained in me, I did not send you a coppy of it; but now by the last Post he wished me to communicate it to you; and therefore *I* doe herewith send you a transcript of it. Certainly you have the satisfaction to have the two greatest men in *France* (by the concession of all the eminentest) to deal withall. And I doubt not but your last Letters of the 4. and 15. of *March* (which I received but this morning; together with one from you at the same time to my Lord *Brounckar*) will make them and all the world give as large and as full a deference to you. For although I had time, since receiving them, but to run them greedily over, whereas such peeces ought to be seriously and leisurely considered (especially by so weak a gamester as I am at this play) yet I see enough of the redundant light in them to reverence, not a rising, but a noon-day Sun in its vertical point and highest Zenith. I am confident that the last Papers

will

will admit no cavils againſt them; And I ſhall out of hand impart them with great alacrity both to Monſ. *Fermat* and to Monſ. *Frenicle*; and what returns they ſhall make to me upon them, I will immediately tranſmit them unto you. Your precedent Letters that lay ſo long in Doctor F's hands, I ſent by the laſt Poſt to Monſ. *Fermat*: I had, the day before, ſent them to Monſ. *Frenicle* (who is in this Town, but my ſickneſs would not allow me to goe my ſelf to him) and he ſent me word by my man, that hee would write ſomething to me upon occaſion thereof, which I ſhould have before the Poſt of *Londons* departure to day. *I* will keep my Packet open till the laſt moment (which is not far off) that if any paper doe come from him, I may here incloſe it to you.

I give you therefore moſt humble and hearty thanks for the noble demonſtration you have been pleaſed to ſend me. In earneſt I am infinitely taken with it; and ſo I am ſure will all men be that ſhall ſee it; which I would requeſt your leave that I might make *publici juris* by committing it to the Preſs, but that in the Poſtſcript of your Letter of the 15. of *March* you intimate to me that you intend to print what hath paſſed between you and theſe Gentlemen, by my conveyance: and doing ſo, I hope (and earneſtly beg) that this excellent production of your ſingle brain, may have a room; which will be a more decent and honourable one, when it ſhall be accompanyed with ſeveral ſiſters of the ſame parent, and waited on by a retinue out of the Families of the two richeſt Lords of this Nation (in this kinde of wealth,) than if it came abroad ſingle by it ſelf without company or attendance. As for what you are pleaſed, moſt civilly and obligingly to ask my ſentiment in, upon occaſion of your publiſhing theſe Letters, I moſt humbly thank you for your regard to me therein, &c. If I could have imagined they ſhould have outlived your running them over (and were written by me as if I had been at the preſent ſpeaking with you) I ſhould have performed my reſpects to you in them with more care and heedfulneſs than I did.

If my health and ſtrength would permit it, I ſhould entertain you with many particulars that I muſt be fain to remit to

another time (although, indeed, you may reaſonably judge this Letter ſo long and tedious, as rather to need a pardon for its exceſſe; but I am ſo delighted when I converſe with you, that I have much adoe to give over:) for, being but newly riſen out of a ſickneſs that confined me near a Month to my bed, I am able to write no longer, this being the firſt time I have uſed my pen (in any thing of moment) ſince my getting up. For, to Mounſ. *Fermat* yeſterday when I ſent him your Letters, I was fain to uſe my Secretaries hand. I wiſh you all happyneſs, and taking leave moſt reſpectfully of you, I reſt

Paris, May 4. 1658.

Worthy Sir,

Your moſt humble, and moſt obedient ſervant,

KENELM DIGBY.

EPISTOLA XXXVII.

D. Fermat *ad* D. Kenelmum Digby. *quæ, cum ſubſequente, præcedenti incluſa erat.*

Monſieur,

IAy receu les nouvelles ſolutions de la propoſition de Monſieur Wallifius que Monſieur Frenicle a adjoutées aux premieres. Ie ſuis ravy auſſy bien que vous de l'abondance & fertilité de ſon eſprit & de la grande facilité qu'il ſ'eſt aquiſe en ces matiers. Ie m'eſtois contenté de donner deux ſolutions en nombres premieres entr'eux, & avois ſeulement indiqué qu'on pouvoit par ma methode eſtendre la queſtion a 3. 4. 5. & pluſieurs nombres de méme nature, mais puis que Monſieur Frenicle m'a ſi avantageuſement preoccupé je n'adjoute plus rien a ſon travail, & je conſens que ma petite & maigre ſolution demeure en vos mains.

Apres avoir receu la lettre de Monſ. Wallifius je ſuis toujours

ſurpris

ſurpris de quoy il mépriſe conſtamment tout ce qu'il ne ſçait pas. Les queſtions en nombres entiers ne ſont point de ſon gouſt. Il ſ' imagine que je ne ſçay point les centres de gravité des hyperboles infinies, & il ſemble promettre ſur la fin la quadrature de l'hyperbole, c'eſt a dire de celle d' Apollonius; car pour toutes les autres ni luy, ni moy ne l'ignorons pas. Je luy reſpons ſuccintement.

Premierement a ce qu'il dit que je fay grand cas des propoſitions negatives, cõme qu'il n'y a que le ſeul quarré 25. qui adiouté a 2. faſſe un cube en nombres entiers : & encore qu'l n'y a que les deux quarrés 4. & 121. qui adjoutés a 4. faſſent des cubes auſſi en entiers, il dit que ce ſont des propoſitions ordinaires *& neque majus quid aut grandius inſinuant quam ſi dicerem cubicubum nullum in integris eſſe vel etiam quadratum qui numero 62 junctus efficiat quadratum, vel etiam nullos in integris cubos eſſe qui ab invicem diſtent numero vicenario, nec præter 8 & 27 qui diſtent numero 19,* &c *cujusmodi innumeras determinationes negativas in promptu eſſet comminiſci.* Je répons que je ne fais point cas de toute ſorte de propoſitions negatives, par example celles qu'il raporte & infinies de telle nature ne ſont que des amuſements d'un Arithmeticien de trois jours, & leur raiſon eſt d'abord connuë *etiam lippis & tonſoribus* : de ſorte que d'en inferer de la qu'il faut faire peu de conte de toutes ſortes de propoſitions negatives, voyez Monſ. quelle Logique ; mais je ne veux point d'antre prenne que celles que je vous ay propoſées ſont du haut eſtage & dignes d'eſtre recherchées, c'eſt que ni luy qui s'eſtime tant ne les a pas encores demontrées, ni Monſ. Frenicle même que je mets au deſſus de luy ſans luy faire tort, & ce dernier qui connoit merveilleuſement les miſteres les plus caches des nombres ne les a pas mépriſées.

Mais par ce que les nombres entiers ne plaiſent pas a Monſ. VVallisius, en voicy vne autre a laquelle il pourra s' occuper & en laquelle je n'exclus point les fractions.

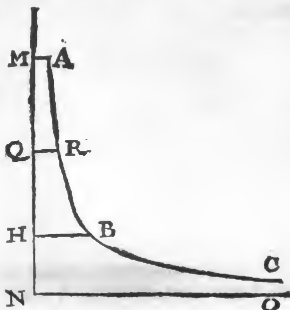
Il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont laire ſoit quarré.

Et pour luy faire voir que le defaut de connoiſance de cette ſorte de queſtions luy ſera quelquefois concevoir plus grande opinion de ſes forces qu'il n'en doit raiſonnablement avoir, il dit qu'il ne doute point que le My Lord Brouncker ne reſolve

les

treuver une chose aussés difficile que celle qu'on a pour but de chercher. *Obscurum autem explicare per obscurius, mataeotechnia est*, comme a tres bien dit notre Viette.

Mais pour luy faire voir que je ne manque pas de theoremes effectifs & tres beaux en la veritable hyperbole d'Apollonius, voicy un probleme dont je puis donner la construction.



Soit l'hyperbole d'Apollonius A B C ses asymptotes M N O. soient tirées les deux paralleles a N O, les droites M A, H B. Je propose la figure A M H B. contenuë sous l'hyperbole & sous les droites A M, M H, H B. Il la faut diviser une parallele aux bases come Q R, en sorte que le segment R Q H B soit au restant A M Q R en raison donnée. Ce probleme sera construit par moy bien plustost que Mr. VVallisius ne donnera la quadrature de l'hyperbole d'Apollonius.

En voila de reste pour ce coup. Ce n'est pas pour faire un demélé formé avec Monsieur VVallisius ; mais c'est seulement pour me justifier a vous ; consentant que vous ne luy envoyez que ce qu'il vous plaira du contenu en cette lettre. Ie ne répons pas aux dernieres réponses par ce que ce n'est pas moy qui luy avois fait les objections ausquelles il répond. Ie suis,

Monsieur,

Votre tres humble, & tres obeissant serviteur

FERMAT.

A Tholoze le 7 Avril 1658.

EPISTOLA XXXVIII.
D. Frenicli *ad* D. Kenelmum Digby.

Mihi quidem propositum erat, vir Illustrissime ac honoratissime, nihil amplius circa has contentiones utpote mihi fastidiosas, & à quibus multum aversatur animus, rescribere; attamen hac adhuc vice me hæc pauca tibi insinuare debere censui, ut scias Clarissimum VVallisium (cognita mihi jam ipsius eruditione) maiorem mihi admirationis ansam præbere, quonam pacto vir acutissimus tantum sui oblitus fuerit in talibus solutionibus tradendis quales in præcedenti Epistola 21. Nov. data conspiciuntur, & etiamnum eas adhuc pro legitimis sustineat. Cæterum non est quod me incuset, quod ego illum, & opera sua despectui habeam, secus enim est, sed si aliam ex illo quam decebat opinionem habui, seipsum arguat, ipsemet etenim hujus fallaciæ causa fuit, qui nugatoria ut ita dicam pro seriis impertivit, forsitan quia his rebus animum serio applicare neglexerit. Visis enim suis postremis solutionibus & postrema Epistola, ipsum jam peritissimum & multum perspicacem agnosco, quamquam suis opinionibus & quas semel protulit tuendis nimium astrictum, non attendendo quam familiare sit hominibus decipi, resipere vero, & importunam pertinacitatem abigere valde honestum atque laudabile. Neque etiam existimet me de ipso triumphum agere, aut illi insultare voluisse; sed responsum suæ Epistolæ non inconveniens reddidi, & paratus sum ei satisfacere super omnibus quæ habentur in binis Epistolis de quibus conqueritur; & nihil in ipsis quod admittendis rationibus non fulciatur, & prædictæ Epistolæ 21. Nov. apprimè non respondeat, contineri ostendere. Falsam enim quam de illo habere debui opinionem non est quod mihi objiciat, quia non potui de illo aliter, quam ex suis operibus judicare. Ex fructibus eorum cognoscetis eos. Et non est Mathematicus qui me mitius quam par erat cum ipso egisse non judicet, nisi omnino tacuissem. Sed equidem si quid est cavillationis in responsis, hanc certè utilitatem attulit ut per illam qualis sit ipse mihi & aliis qui postremam ipsius Epistolam viderunt partim innotuerit, stimulum enim illi addidit ut quæstiones

nes

nes accuratius inſpiceret & penetraret: per hanc enim, tertiam Fermatianam, & ſuam poſſidere apparet: de duabus primis Fermatianis ambigitur donec tradat alium ab unitate cubum & quadratum qui cum ſuis partibus faciant quadratum vel cubũ; vel ſaltem problema ſolvat, in Freniclis ad Schoteniam ſolutionem Inquiſitione paginis 3. & 4. contentum,& quæſitos in numeris tres cubos & quadratum Analyticis notis expoſitos reperiat. Animadvertat etiam Clar. Walliſius ut non Fermatii ſilentium taliter accipiat, quaſi ſibi ſatisfactum fuiſſe putet, & talibus ſolutionibus acquieſcat; multo enim ſecus eſt; ſed inde prodiit, quod tantum ſuis non recipiendis ſolutionibus eum addictum videat, ut ipſum in illarum falſa exiſtimatione, & vano quod ab illis accepit gaudio relinquere, ſatius eſſe autumet, quam fruſtra conari, ut illum ab ipſis deterreat. Quædam autem ſunt in poſtrema Cl. VVallifii Epiſtola 19. Martii data in quibus mihi ſincere non agere videtur, cum ſecundam ex binis meis Epiſtolis de quibus ſupra, primæ contradicere ſuſtinet, quia, inquit, unitatem pro cubo & quadrato 2ª recipit, 1ª rejicit. Non enim in 1ª. unitas pro cubo aut quadrato repudiatur, cum ipſa communiter ut talis aſſumatur: Sed cum non habeat partes, hanc pro cubo aut quadrato quæſitis (qui quidem ſuis partibus jungi, & ideo partes habere debent) tradi poſſe negatur. Cum igitur in 1ª nullum Cubum VValliſium tradidiſſe perhibetur, cum unitatem obtulit, luce clarius eſt intelligendum eſſe, non quod nullus plane cubus ſit unitas, ſed nullus qui quæſtioni ſatisfaciat. quod autem ſpectat ad ſolutiones quæ tam faciles ſunt, ut ad eas multiplicatio numeri dati in 2 vel 3 ſufficiat, neſcio an in Anglia tua admitti conſueverint; minime verò hic admitterentur; & quamvis verum ſit problema imperfectè propoſitum fore quando talis ſolutio ei ſatisfacere poteſt, ſi ea non ſit ſecundum mentem Authoris, attamen taliter aſtringendos eſſe Mathematicos non exiſtimamus ut omnino accuratè proponere teneantur, præſertim cum ab eruditis traduntur qualem eſſe doctiſſimum Fermatium non eſt quod in dubium revocetur, & cum animi tantum gratia & raptim exhibentur; ad ſolventem enim attinet juſtam & de ſe dignam ſolutionem impertiri: Et ſi quis ſerio tale problema & tam facile ſolvendum alicui proponeret

illud pro injuria sumeretur, quasi eum pro imperito haberet, ad quem talia quæ nedum pueris tradi deberent, sufficere viderentur. Hæc tibi vir Illust. indicanda putavi, ut scias quid jam de Clariss. VVallisio censeam, & invitum me, invitante & quasi compellente, (mihi enim tua desideria jussa sunt) judicium de ipsius Epistola tulisse; insuper & me tibi semper devinctissimum & addictissimum fore. Vale.

EPISTOLA XXXIX.

D. Joh. Wallis *ad D.* Kenelmum Digby.

QUas ad me miseras, Heros Nobilissime, Tuas literas, Parisiis 4 Maii St. nov. datas accepimus Maii 3, stilo nostro: quam ego uti gratulor celeritatem, ita dolere subit quod tam tarde quas ad Te miserim eo pervenerint. Tuas autem accepisse cum omnino fieri non possit quin me non modica reficiat voluptate (utpote quum inde discam liceat quanta me fueris benevolentia prosecutus atque honore affeceris;) non interim dissimulandum quia unum sit aut alterum quod inibi me male habeat. Atque illud quidem maxime, quod adversæ tuæ valetudinis nuncium secum ferant. quippe qui non ignorat in literis promovendis quantus sis, non potest non de Te tuaque valetudine admodum esse solicitus, ut qui non ignoret quantum hinc dependeat. Divino interim Numini tribuendum erit, quod, in bonarum literarum commodum, Te sospitem conservârit, decori adhuc futurum & ornamento. Dolet insuper, ubi profusas quas in me effundis laudes conspicio, (quod humanitati tuæ non meis meritis dandum est,) non modo omnino imparem me esse merendis illis, sed & rependendis quæ inde debeantur gratiis. Ea enim facilitate stili polles, animiq; ad humanitatis officia promptitudine, ut imprudentiæ planè nostræ dandum sit si velim hac ex parte tecum certare, tuaq; in me collata beneficia verbis æquare coner. Fassus itaq; quam sim ad hoc imbellis, ut plane victus succumbam, nec præter animi humillime submissi gratitudinem, quam credas velim verbis superiorem, non habeam quod rependam; si fasso veniam

largiri

largiri velis, nec dedigneris quem hactenus largitus es favore prosequi; quæ sequuntur reliqua paucis absolvam.

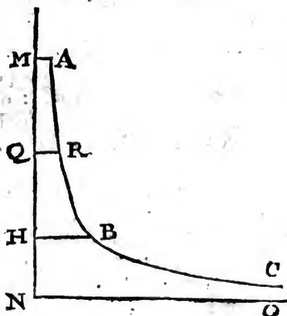
Et quidem ad inclusas D. Frenicli literas, quarum humanitatem gratus agnosco, vix est quod reponam, præter grates nostras ob eam quam de me opinionem conceperit & profitetur. Quam utique de prioribus literis sive excusationem sui, sive & defensionem exhibeat, lubens admitto. Neque contendam, si, quam ego justam nostri defensionem me attulisse putaverim, importunam ille pertinaciam etiamnum autumet: vel etiam, quod, an duobus primis Fermatii quæsitis potis sim respondere, adhuc ambigat; quod tamen ubi nostras 4 & 15 Martii datas perpenderit non ultra dubitabit. Sed nec disputabo an prioribus suis literis unitatem negaverit Quadratum esse vel Cubum. Nihil enim horum tanti est, ut cum Nobilissimo Viro de his contendam. Ad nostram autem quod attinet quæstionem (de Quadratis qui partibus suis additi eandem efficiant summam,) Fermatio pridem obiter propositam; video (ex literis nuperrime receptis) non modo Ferniclum eam solvisse, sed & pluris longe fecisse, quam ipse facturus essem. Neque etiam aliter expectandum erat, quin eam promptissime solvat, cum ex iisdem plane principiis dependeat istius solutio, atque illarum Fermatii quas pridem solverat.

Sed neque multum est quod ad D. Fermatii literas reponendum judico. Saltem hæc duo sufficiant. Alterum, quod, ubi insinuat me suscepisse, non dubitasse saltem, quin D. Vicecomes Brouncker *potis sit solvere, modo velit aggredi*, propositionem illam de *Dato cubo in duos cubos rationales dividendo*, cum interim (uti jam affirmat) propositum illud sit impossibile; adeoque me temere saltem & incaute id suscepisse: dicendum est Clarissimum Virum, quod ego inibi susceperim, imperfecte admodum recitare; reticendo nempe, quod ego addideram, *saltem quatenus natura rei patitur*. Quod quidem ideo subjunxi, quia jam tum suspicabar, vel primo aspectu, rem esse impossibilem, (utut, cum nondum examinaveram, non erat cur affirmarem;) adeoque non aliam insinuabam solutionem quam qualem res ipsa patitur; (nempe, ut rem præstet si sit possibilis, vel, si secus, ut deprehendat impossibilitatem,) Quæ quidem me conjectura neutiquam fefellit. Siquidem sub id tempus, idip-

sum mihi significavit vir Honoratissimus, quod jam Fermatius suggerit; his verbis: (literis privatis ad me datis) *Sir, The last night I received yours*, &c. *Your opinion therein concerning Mr.* Fermat *is really the same with mine, especially in relation to his last Paper*, &c. *His negative determinations are, I conceive, his greatest glory; and where in he thinks himself to be singular*: *Else certainly hee would not propose things impossible*, viz. Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere, *which is impossible.* (*Not medling with the other, as done already, at least in several instances, by Mons. Frenicle, as you know.*) &c.

Alterum id est quod de Hyperbolis habet. Ubi existimat me fidem non habere dictis suis de centro Gravitatis in Hyperbolis Infinitis. Quod longe secus est. quippe ego ne suspicabar quidem, quin egerit bona fide Vir Nobilissimus, cum ea sibi perspecta dixerit, & quidem à multis annis; nempe, in Hyperbolis Integris; (fortassis etiam & in semihyperbolis, utut illud nondum dixerit:) Uti nec jam suspicor, quin quam hic subjungit quæstionem potis sit solvere. Sed & alia quamplurima, sive de Hyperbolis, sive de aliis item Geometriæ apicibus, vel etiam Arithmeticis, egregia Theoremata sibi præsto esse nullus dubito. quorum & specimina non pauca jam præstitit.

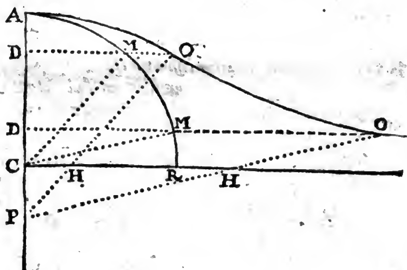
quam autem jam exponit quæstionem; nempe *Expositâ verâ Hyperbolâ* A B C, *cujus Asymptota*, N M, N O; *quarum alteri, puta*



N O, *parallelæ ducantur* M A, H B: *Propositum est, figuram* A M H B, (*lineâ Hyperbolicâ, & tribus rectis* A M, M H, H B, *contentam,*) *rectâ* Q R (*quæ sit ipsis* H B, M A, *parallela,*) *ita secare, ut segmentum* R Q H B, *ad reliquum* A M Q R, *sit in ratione data*: Sic solvo. Si data ratio sit effabilis, veris exponatur numeris integris, puta ut 3 ad 2, vel ut *a* ad *e*; atque inter rectas *NH, NM*, inveniantur tot mediæ proportionales (saltem, ex tot, ea quæ opus erit) quot est utriusque numeri aggregatum unâ minus, puta $4 = 3 + 2 - 1$, vel $a + e - 1$; quarum tertia (sive quæ ab *a* denominatur) ab *NH*; vel secunda (sive quæ ab *e* denominatur) ab *NM*; sit *NQ*. Dico; Rectam *QR* (quæ à puncto *Q*, ipsis *H B.* vel *M A*, ducatur parallela) rem imperatam præstare. Si vero data ratio sit ineffabilis, poterit id ipsum præstari, Logarithmorum ope, quamproxime, utut non secundum Geometricam ἀκρίβειαν.

Reliqua quod attinet; vel jamdudum de illis dictum est, vel omitti saltem poterunt. Neque enim vacat, vel operæ pretium esse duco, ad singulas minutias descendere.

Cæterum, ut Nobilissimo Viro vices rependam, visum est, Quæstionem hanc (præcedenti suæ non absimilem, nec minus fortassis elegantem,) sibi reponere. Nempe, *Exposita Conchoide*

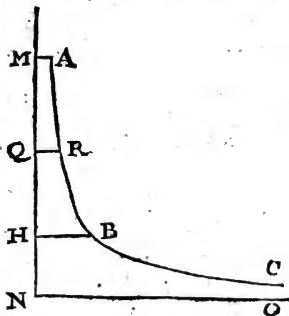


A O, *cujus vertex* A, *Polus* P, *regula* C R H (*rectam* A P *in puncto* C *secans ad angulos rectos*) *si centro* C *ducatur quadrans circuli* A R (*versus partes* O H:) *Propositum sit, Figuræ conchali* O A R H *infinitæ* (*lineis*

ſum mihi ſignificavit vir Honoratiſſimus, quod jam Fermatius ſuggerit; his verbis: (literis privatis ad me datis) *Sir, The laſt night I received yours*, &c. *Your opinion therein concerning Mr.* Fermat *is really the ſame with mine, eſpecially in relation to his laſt Paper*, &c. *His negative determinations are, I conceive, his greateſt glory, and wherein he thinks himſelf to be ſingular: Elſe certainly hee would not propoſe things impoſſible*, viz. Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere, *which is impoſſible.* (*Not medling with the other, as done already, at leaſt in ſeveral inſtances, by Monſ. Frenicle, as you know.*) &c.

Alterum id eſt quod de Hyperbolis habet. Ubi exiſtimat me fidem non habere dictis ſuis de centro Gravitatis in Hyperbolis Infinitis. Quod longe ſecus eſt. quippe ego ne ſuſpicabar quidem, quin egerit bona fide Vir Nobiliſſimus, cum ea ſibi perſpecta dixerit, & quidem à multis annis; nempe, in Hyperbolis Integris; (fortaſsis etiam & in ſemihyperbolis, utut illud nondum dixerit:) Uti nec jam ſuſpicor, quin quam hic ſubjungit quæſtionem potis ſit ſolvere. Sed & alia quamplurima, ſive de Hyperbolis, ſive de aliis item Geometriæ apicibus, vel etiam Arithmeticis, egregia Theoremata ſibi præſto eſſe nullus dubito. quorum & ſpecimina non pauca jam præſtitit.

quam autem jam exponit quæſtionem; nempe *Expoſitâ verâ Hyperbolâ* A B C, *cujus Aſymptotæ*, N M, N O; *quarum alteri, puta*



N O, *parallelæ ducantur* M A, H B: *Propositum est, figuram* A M H B, (*lineâ Hyperbolicâ, & tribus rectis* A M, M H, H B, *contentam,*) *rectâ* Q R (*quæ sit ipsis* H B, M A, *parallela,*) *ita secare, ut segmentum* R Q H B, *ad reliquum* A M Q R, *sit in ratione data*: Sic solvo. Si data ratio sit effabilis, veris exponatur numeris integris, puta ut 3 ad 2, vel ut *a* ad *e*; atque inter rectas *NH*, *NM*, inveniantur tot mediæ proportionales (saltem, ex tot, ea quæ opus erit) quot est utriusque numeri aggregatum unâ minus, puta $4 = 3 + 2 - 1$, vel $a + e - 1$; quarum tertia (sive quæ ab *a* denominatur) ab *NH*; vel secunda (sive quæ ab *e* denominatur) ab *NM*; sit *NQ*. Dico; Rectam *QR* (quæ à puncto *Q*, ipsis *H B*. vel *M A*, ducatur parallela) rem imperatam præstare. Si vero data ratio sit ineffabilis, poterit id ipsum præstari, Logarithmorum ope, quamproxime, utut non secundum Geometricam ἀκρίβειαν.

Reliqua quod attinet; vel jamdudum de illis dictum est, vel omitti saltem poterunt. Neque enim vacat, vel operæ pretium esse duco, ad singulas minutias descendere.

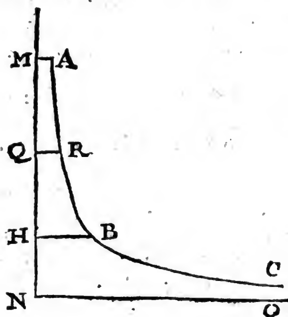
Cæterum, ut Nobilissimo Viro vices rependam, visum est, Quæstionem hanc (præcedenti suæ non absimilem, nec minus fortassis elegantem,) sibi reponere. Nempe, *Exposita Conchoide*

A O, *cujus vertex* A, *Polus* P, *regula* C R H (*rectam* A P *in puncto* C *secans ad angulos rectos*) *si centro* C *ducatur quadrans circuli* A R (*versus partes* O H:) *Propositum sit, Figura conchali* O A R H *infinite* (*lineis*

sum mihi significavit vir Honoratissimus, quod jam Fermatius suggerit; his verbis: (literis privatis ad me datis) *Sir, The last night I received yours*, &c. *Your opinion therein concerning Mr.* Fermat *is really the same with mine, especially in relation to his last Paper*, &c. *His negative determinations are, I conceive, his greatest glory, and wherein he thinks himself to be singular: Else certainly hee would not propose things impossible*, viz. Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere, *which is impossible.* (*Not medling with the other, as done already, at least in several instances, by Mons. Frenicle, as you know.*) &c.

Alterum id est quod de Hyperbolis habet. Ubi existimat me fidem non habere dictis suis de centro Gravitatis in Hyperbolis Infinitis. Quod longe secus est. quippe ego ne suspicabar quidem, quin egerit bona fide Vir Nobilissimus, cum ea sibi perspecta dixerit, & quidem à multis annis; nempe, in Hyperbolis Integris; (fortassis etiam & in semihyperbolis, utut illud nondum dixerit:) Uti nec jam suspicor, quin quam hic subjungit quæstionem potis sit solvere. Sed & alia quamplurima, sive de Hyperbolis, sive de aliis item Geometriæ apicibus, vel etiam Arithmeticis, egregia Theoremata sibi præsto esse nullus dubito. quorum & specimina non pauca jam præstitit.

quam autem jam exponit quæstionem; nempe *Expositâ verâ Hyperbolâ* A B C, *cujus Asymptotæ*, N M, N O; *quarum alteri, puta*



N Θ, *parallelæ ducantur* M A, H B: *Propositum est, figuram* A M H B, (*lineâ Hyperbolicâ, & tribus rectis* A M, M H, H B, *contentam,*) *rectâ* Q R (*quæ sit ipsis* H B, M A, *parallela,*) *ita secare, ut segmentum* R Q H B, *ad reliquum* A M Q R, *sit in ratione data*: Sic solvo. Si data ratio sit effabilis, veris exponatur numeris integris, puta ut 3 ad 2, vel ut *a* ad *e*; atque inter rectas *N H, N M,* inveniantur tot mediæ proportionales (saltem, ex tot, ea quæ opus erit) quot est utriusque numeri aggregatum unâ minus, puta $4 = 3 + 2 - 1$, vel $a + e - 1$; quarum tertia (sive quæ ab *a* denominatur) ab *NH*; vel secunda (sive quæ ab *e* denominatur) ab *NM*; sit *NQ*. Dico, Rectam *QR* (quæ à puncto *Q*, ipsis *H B.* vel *M A*, ducatur parallela) rem imperatam præstare. Si vero data ratio sit ineffabilis, poterit id ipsum præstari, Logarithmorum ope, quamproxime, utut non secundum Geometricam ἀκρίβειαν.

Reliqua quod attinet; vel jamdudum de illis dictum est, vel omitti saltem poterunt. Neque enim vacat, vel operæ pretium esse duco, ad singulas minutias descendere.

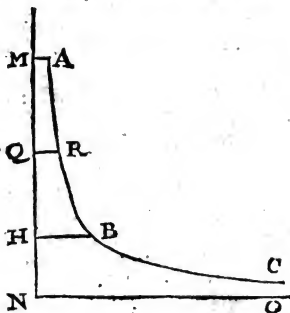
Cæterum, ut Nobilissimo Viro vices rependam, visum est, Quæstionem hanc (præcedenti suæ non absimilem, nec minus fortassis elegantem,) sibi reponere. Nempe, *Exposita Conchoide*

A O, *cujus vertex* A, *Polus* P, *regula* C R H (*rectam* A P *in puncto* C *secans ad angulos rectos*) *si centro* C *ducatur quadrans circuli* A R (*versus partes* O H:) *Propositum sit, Figuræ conchali* O A R H *infinitæ* (*lineis*

ſum mihi ſignificavit vir Honoratiſſimus, quod jam Fermatius ſuggerit;his verbis:(literis privatis ad me datis)*Sir, The laſt night I received yours*, &c. *Your opinion therein concerning* Mr. Fermat *is really the ſame with mine, eſpecially in relation to his laſt Paper*, &c. *His negative determinations are, I conceive, his greateſt glory, and where in he thinks himſelf to be ſingular: Elſe certainly hee would not propoſe things impoſſible*, viz. Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere, *which is impoſſible.* (*Not medling with the other, as done already, at leaſt in ſeveral inſtances, by Monſ. Frenicle, as you know.*) &c.

Alterum id eſt quod de Hyperbolis habet. Ubi exiſtimat me fidem non habere dictis ſuis de centro Gravitatis in Hyperbolis Infinitis. Quod longe ſecus eſt. quippe ego ne ſuſpicabar quidem, quin egerit bona fide Vir Nobiliſſimus, cum ea ſibi perſpecta dixerit, & quidem à multis annis; nempe, in Hyperbolis Integris; (fortaſsis etiam & in ſemihyperbolis, utut illud nondum dixerit:) Uti nec jam ſuſpicor, quin quam hic ſubjungit quæſtionem potis ſit ſolvere. Sed & alia quamplurima, ſive de Hyperbolis, ſive de aliis item Geometriæ apicibus, vel etiam Arithmeticis, egregia Theoremata ſibi præſto eſſe nullus dubito. quorum & ſpecimina non pauca jam præſtitit.

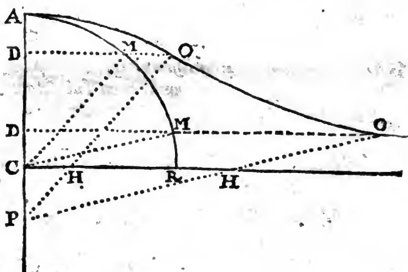
quam autem jam exponit quæſtionem; nempe *Expoſitâ verâ Hyperbolâ* A B C, *cujus Aſymptotæ*, N M, N O; *quarum alteri, puta*



NO, *parallelæ ducantur* MA, HB: *Propositum est, figuram* AMHB, (*lineâ Hyperbolicâ, & tribus rectis* AM, MH, HB, *contentam,*) *rectâ* QR (*quæ sit ipsis* HB, MA, *parallela,*) *ita secare, ut segmentum* RQHB, *ad reliquum* AMQR, *sit in ratione data*: Sic solvo. Si data ratio sit effabilis, veris exponatur numeris integris, puta ut 3 ad 2, vel ut *a* ad *e*; atque inter rectas *NH*, *NM*, inveniantur tot mediæ proportionales (saltem, ex tot, ea quæ opus erit) quot est utriusque numeri aggregatum unâ minus, puta $4 = 3 + 2 - 1$, vel $a + e - 1$; quarum tertia (sive quæ ab *a* denominatur) ab *NH*; vel secunda (sive quæ ab *e* denominatur) ab *NM*; sit *NQ*. Dico, Rectam *QR* (quæ à puncto *Q*, ipsis *H B*. vel *MA*, ducatur parallela) rem imperatam præstare. Si vero data ratio sit ineffabilis, poterit id ipsum præstari, Logarithmorum ope, quamproxime, utut non secundum Geometricam ἀκρίβειαν.

Reliqua quod attinet; vel jamdudum de illis dictum est, vel omitti saltem poterunt. Neque enim vacat, vel operæ pretium esse duco, ad singulas minutias descendere.

Cæterum, ut Nobilissimo Viro vices rependam, visum est, Quæstionem hanc (præcedenti suæ non absimilem, nec minus fortassis elegantem,) sibi reponere. Nempe, *Exposita Conchoide*



AO, *cujus vertex* A, *Polus* P, *regula* CRH (*rectam* AP *in puncto* C *secans ad angulos rectos*) *si centro* C *ducatur quadrans circuli* AR (*versus partes* OH:) *Propositum sit, Figuræ conchali* OARH *infinitæ* (*lineis*

illud pro injuria sumeretur, quasi eum pro imperito haberet, ad quem talia quæ nedum pueris tradi deberent, sufficere viderentur. Hæc tibi vir Illust. indicanda putavi, ut scias quid jam de Clariss. VVallisio censeam, & invitum me, invitante & quasi compellente, (mihi enim tua desideria jussa sunt) judicium de ipsius Epistola tulisse; insuper & me tibi semper devinctissimum & addictissimum fore. Vale.

EPISTOLA XXXIX.

D. Joh. Wallis *ad* D. Kenelmum Digby.

QUas ad me miseras, Heros Nobilissime, Tuas literas, Parisiis 4 Maii St. nov. datas accepimus Maii 3, stilo nostro: quam ego uti gratulor celeritatem, ita dolere subit quod tam tarde quas ad Te miserim eo pervenerint. Tuas autem accepisse cum omnino fieri non possit quin me non modica reficiat voluptate (utpote quum inde discam liceat quanta me fueris benevolentia prosecutus atque honore affeceris;) non interim dissimulandum quia unum sit aut alterum quod inibi me male habeat. Atque illud quidem maxime, quod adversæ tuæ valetudinis nuncium secum ferant. quippe qui non ignorat in literis promovendis quantus sis, non potest non de Te tuaque valetudine admodum esse solicitus, ut qui non ignoret quantum hinc dependeat. Divino interim Numini tribuendum erit, quod, in bonarum literarum commodum, Te sospitem conservârit, decori adhuc futurum & ornamento. Dolet insusuper, ubi profusas quas in me effundis laudes conspicio, (quod humanitati tuæ non meis meritis dandum est,) non modo omnino imparem me esse merendis illis, sed & rependendis quæ inde debeantur gratiis. Ea enim facilitate stili polles, animiq; ad humanitatis officia promptitudine, ut imprudentiæ planè nostræ dandum sit si velim hac ex parte tecum certare, tuaq; in me collata beneficia verbis æquare coner. Fassus itaq; quam sim ad hoc imbellis, ut plane victus succumbam, nec præter animi humillime submissi gratitudinem, quam credas velim verbis superiorem, non habeam quod rependam; si fasso veniam

largiri

largiri velis, nec dedigneris quem hactenus largitus es favore prosequi; quæ sequuntur reliqua paucis absolvam.

Et quidem ad inclusas D. Frenicli literas, quarum humanitatem gratus agnosco, vix est quod reponam, præter grates nostras ob eam quam de me opinionem conceperit & profitetur. Quam utique de prioribus literis sive excusationem sui, sive & defensionem exhibeat, lubens admitto. Neque contendam, si, quam ego justam nostri defensionem me attulisse putaverim, importunam ille pertinaciam etiamnum autumet: vel etiam, quod, an duobus primis Fermatii quæsitis potis sim respondere, adhuc ambigat; quod tamen ubi nostras 4 & 15 Martii datas perpenderit non ultra dubitabit. Sed nec disputabo an prioribus suis literis unitatem negaverit Quadratum esse vel Cubum. Nihil enim horum tanti est, ut cum Nobilissimo Viro de his contendam. Ad nostram autem quod attinet quæstionem (de Quadratis qui partibus suis additi eandem efficiant summam,) Fermatio pridem obiter propositam; video (ex literis nuperrime receptis) non modo Ferniclum eam solvisse, sed & pluris longe fecisse, quam ipse facturus essem. Neque etiam aliter expectandum erat, quin eam promptissime solvat, cum ex iisdem plane principiis dependeat istius solutio, atque illarum Fermatii quas pridem solverat.

Sed neque multum est quod ad D. Fermatii literas reponendum judico. Saltem hæc duo sufficiant, Alterum, quod, ubi insinuat me suscepisse, non dubitasse saltem, quin D. Vicecomes Brouncker *potis sit solvere, modo velit aggredi*, propositionem illam de *Dato cubo in duos cubos rationales dividendo*, cum interim (uti jam affirmat) propositum illud sit impossibile; adeoque me temere saltem & incaute id suscepisse: dicendum est Clarissimum Virum, quod ego inibi susceperim, imperfecte admodum recitare; reticendo nempe, quod ego addideram, *saltem quatenus natura rei patitur*. Quod quidem ideo subjunxi, quia jam tum suspicabar, vel primo aspectu, rem esse impossibilem, (utut, cum nondum examinaveram, non erat cur affirmarem;) adeoque non aliam insinuabam solutionem quam qualem res ipsa patitur; (nempe, ut rem præstet si sit possibilis, vel, si secus, ut deprehendat impossibilitatem.) Quæ quidem me conjectura neutiquam fefellit. Siquidem sub id tempus, id ipsum

N Θ, *parallelæ ducantur* M A, H B: *Propositum est, figuram* A M H B, (*lineâ Hyperbolicâ, & tribus rectis* A M, M H, H B, *contentam,*) *rectâ* Q R (*quæ sit ipsis* H B, M A, *parallela,*) *ita secare, ut segmentum* R Q H B, *ad reliquum* A M Q R, *sit in ratione data*: Sic solvo. Si data ratio sit effabilis, veris exponatur numeris integris, puta ut 3 ad 2, vel ut *a* ad *e*; atque inter rectas *NH*, *NM*, inveniantur tot mediæ proportionales (saltem, ex tot, ea quæ opus erit) quot est utriusque numeri aggregatum unâ minus, puta $4 = 3 + 2 - 1$, vel $a + e - 1$; quarum tertia (sive quæ ab *a* denominatur) ab *NH*; vel secunda (sive quæ ab *e* denominatur) ab *NM*; sit *NQ*. Dico, Rectam *QR* (quæ à puncto *Q*, ipsis *H B*. vel *M A*, ducatur parallela) rem imperatam præstare. Si vero data ratio sit ineffabilis, poterit id ipsum præstari, Logarithmorum ope, quamproxime, utut non secundum Geometricam ἀκρίβειαν.

Reliqua quod attinet; vel jamdudum de illis dictum est, vel omitti saltem poterunt. Neque enim vacat, vel operæ pretium esse duco, ad singulas minutias descendere.

Cæterum, ut Nobilissimo Viro vices rependam, visum est, Quæstionem hanc (præcedenti suæ non absimilem, nec minus fortassis elegantem,) sibi reponere. Nempe, *Exposita Conchoide* A O, *cujus vertex* A, *Polus* P, *regula* C R H (*rectam* A P *in puncto* C *secans ad angulos rectos*) *si centro* C *ducatur quadrans circuli* A R (*versus partes* O H:) *Propositum sit, Figuræ conchali* O A R H *infinitæ* (*lineis*

lineis RH *recta, & conchali* AO, *infinitis, una cum quadrantali* AR, *contentæ) istiusmodi aliam (puta ω α ϱ η) in data ratione describere.* Nisi malit ut Theorematice potius exponam (ne tantum gryphos videar proponere) ad hanc formam. *Rationem figuræ conchalis infinitæ* OARH, *ad istiusmodi aliam quamcunque ω α ϱ η, componi ex rationibus* CA *ad* κ α, *&* CP *ad* κ ϖ (idem nempe denotantibus literis *α, κ, ϖ, ϱ, η, ω*, in una figura, atque *A, C, P, R, H, O*, in altera,) quantumvis immutetur ratio rectarum *AC*, *CP*. Cujus tum investigationem, tum demonstrationem, si expetat, exhibebo.

Unicum adhuc superest, vir Illustrissime. Intelligo ex literis tuis, Nobilissimos ambos esse viros quibuscum hactenus egimus. Et fieri quidem omnino posse puto, ut vir exterus, nec rerum vel dignitatum istius gentis satis callens, familiarius aliquando quam par est, nec satis fortasse pro dignitate sua, Nobilissimos Viros compellaverim, sive dum meas, sive dum & Honoratissimi Vicecomitis partes egerim. Sin istiusmodi quicquam peccavi, invitus peccavi: nec imputabunt, spero, Nobilissimi Viri, (qui in communem mecum arenam descendere dignati fuerint, sponte sua,) pulveri scholastico, quam Aulari, magis assueto. Quam ipsam excusationem admittas, oro, siquid istiusmodi in Te peccaverim; Neque enim alias me gessisse velim, quam ut deceat,

Oxon. Maii 5. 1658.

Illustrissime Vir,
Humillimum Tui, atque obsequentissimum servum

Joh: Wallis.

EPISTOLA XL.

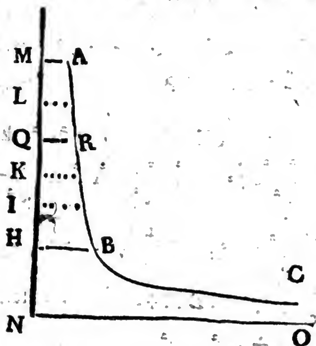
D. Joh. Wallis *ad D. Vicecomitem* Brouncker.

Nobilissime Domine,

Literas meas nuper scriptas, Parisios transmittendas, Te tutò accepisse intelligo. Quas autem à me postulas demonstrationes

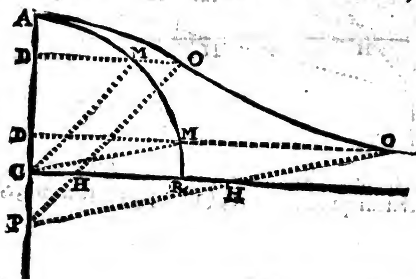
ſpectantes ; ſic breviter accipias.

Problematis Fermatiani (de *ſpatio Hyperbolico in data ratione dividendo*) ſolutio ſic demonſtratur. Sumptis (in Aſymptoto) rectis *NH*, *NI*, *NK*, *NQ*, *NL*, *NM*, Geometrice proportionalbus, ſi à punctis *H*, *I*, *K*, *Q*, *L*, *M*, ducantur rectæ parallelæ alteri A-



ſymptoto, ſpatium Hyperbolicum *ABHM* in quinque partes æquales dividi, oſtendit Gregorius de ſancto Vincentio, libro (ſi memini) decimo. Harum itaque cum hinc duæ, illinc tres reperiantur manifeſtum eſt a recta *QR* in ratione 2 ad 3 ſecari. Quod erat demonſtrandum.

Noſtrum autem ſive Problema, ſive Theorema, de Figura



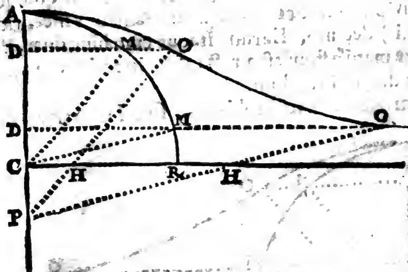
 'Con-

Conchali; sic breviter habeas explicatum. Esto Conchoidis AOO, polus P, vertex A, norma CHH; quadrans circuli CAR; ordinatim applicata quælibet in quadrante, DM; in conchoide, DO; reliquaque ut in Schemate constructa. Ponamus jam, ob commodiorem calculum, $HO\ (=CA=CR=CM) = r$. Et $CP=p$. $CD=c$. Et $PD\ (=p+c)=l$, adeoque $PDq = l^2$.

Tum (propter parallelas, & similia triangula) $CD . HO :: c . r :: PC = p . PH = \frac{pr}{c} :: PD = l . PO = \frac{lr}{c}$. Et $POq = \frac{l^2 r^2}{c^2}$

Item (per 47 e 1) $CMq - CDq = DMq = r^2 - c^2$. Et $DOq = POq - PDq = \frac{l^2 r^2}{c^2} - l^2 = \frac{l^2 r^2 - l^2 c^2}{c^2} = \frac{r^2 - c^2}{c^2} l^2$.

Adeoque $DO = \frac{l}{c}\sqrt{:r^2 - c^2:} = \frac{b+p}{c}\sqrt{:r^2 - c^2:} = \sqrt{:r^2 - c^2:} + \frac{\sqrt{:r^2 - c^2:}}{c} p. = DM + MO$. Est autem $DM = \sqrt{:r^2 - c^2:}$ Ergo $MO = \frac{\sqrt{:r^2 - c^2:}}{c} p$.



His positis, Si, in diversis conchoidibus AO, $A\omega$, maneat utrobique eadem quantitas CA, (adeoque ut eædem r, c,) mutata

-tata quantitate *P C*, (puta *p* in ϖ) erit ubique *M O* ad *M* ω, ut $\frac{\sqrt{: r^2 - c^2:}}{c} p$, ad $\frac{\sqrt{: r^2 - c^2:}}{c} \varpi$; sive ut *p* ad ϖ. Adeoque & omnes *M O* ad *M* ω, hoc est, propter eandem utrobique altitudinem, figura *R M A O*, ad figuram *R M A* ω, ut *p*, ad ϖ.

Sin, manente quantitate *P C* = *p*, mutetur quantitas *C A*, adeoque & *C D*; puta *r* in ρ, & *c* in κ; erit ubique *M O* ad *M* ω, ut $\frac{\sqrt{: r^2 - c^2:}}{c} p$, ad $\frac{\sqrt{: \rho^2 - \kappa^2:}}{\kappa} p$, sive ut $\frac{\sqrt{: r^2 - c^2:}}{c}$ ad $\frac{\sqrt{: \rho^2 - \kappa^2:}}{\kappa}$ hoc est ut *r* ad ρ. (Sunt enim omnes $\sqrt{: rr - cc;}$ ad omnes $\sqrt{: \rho\rho - \kappa\kappa:}$ hoc est, quadrans ad quadrantem, ut *rr* ad $\rho\rho$, sive in duplicatâ ratione radiorum: Item *c* ad κ, ubique ut *r* ad ρ: Adeoq; omnes $\frac{\sqrt{: rr - cc:}}{c}$ ad omnes $\frac{\sqrt{; \rho\rho - \kappa\kappa:}}{\kappa}$ ut $\frac{rr}{r}$ ad $\frac{\rho\rho}{\rho}$, sive ut *r* ad ρ.

Sin denique fiat utrobique immutatio; puta tum quantitatis *P C*, tum *C A*; hoc est *p* in ϖ, & *r* in ρ: erunt omnes *MO*, sive $\frac{\sqrt{; rr - cc;}}{c} p$, ad omnes $\mu\omega$, sive $\frac{\sqrt{; \rho\rho - \kappa\kappa;}}{\kappa} \varpi$; (hoc est, figura *RMAO*, ad figuram $\rho\mu\alpha\omega$;) in ratione composita ex *p* ad ϖ, atque ex *r* ad ρ: hoc est, in ratione *pr* ad $\varpi\rho$; sive, ut rectangulũ *PCA*, ad rectangulum $\varpi\kappa\alpha$, Quod erat ostendendum.

Atque hoc cognito; facile erit vel figuram conchalem *RMAO* in data ratione secare, vel etiam aliam in data ratione construere.

Problema tertium, cujus etiam solutionem à me petis (quod Fermatii literas non spectat) hoc erat. Sub initium Februarii jam proxime elapsi, amicorum non nemo cui forte occurrebam serò vesperi, quæstionem sequentem mihi porrexit in scriptis; quam jam nuperrime, ab eodem intelligo typis vulgatam esse cum hac Epigraphe; *Spectatissimos viros Matheseos Professores, & alios præclaros in Anglia Mathematicos, ut Problema solvere dignentur*, Jean de Montfert *maxime desiderat.*

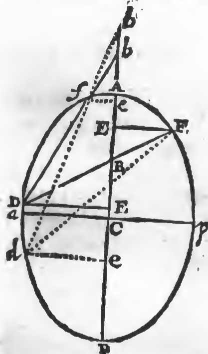
Extremis Ellipseos Diametris, distantia centri ab aliquo puncto in axi transverso, ubi linea eandem secet sub angulo dato, in numeris datis: segmenta ejusdem lineæ (si opus est) productæ, & intra transversum Axim & Ellipsim terminata, in numeris invenire.

Datis	A C.	1,00000.	Quæruntur	BD.
	a c.	,76604.		BF.
	C B.	,50000.		
	CBD.	70 grad.		

Hanc ego quæstionem, suam ratus (neque enim vel innuebat ille, vel ego tum sciscitabar, cujus erat, paulo adhuc universalius expositam, sub hac fere quæ subest formâ (neque enim ipsissima verba memini) postero mane solvebam; nec everam de illa ultra solicitus; (ut quæ res nec magnæ difficultatis videbatur, nec momenti; quam &, quod jam audio, varii variis modis solvebant, utut eorum solutiones nondum viderim.

Datis, in Ellipsi extremis diametris, (vel etiam conjugatis quibusvis, una cum inclinationis angulo,) A P, ap; *quarum utrivis, puta* A P, *occurrat in dato puncto* B, *(sive intra Ellipsim, sive etiam extra productæ, recta* D F, *Ellipsi in punctis* D F *occurrens: Rectas* B D, B F, *investigare.*

A punctis D F, diametro A P, ordinatim-applicentur D E,



FE.

FE. Vt ponamus (ob calculi commodum) $AP = 2d$, $ap = 2\delta$; DE vel $FE = a$, $BG = b$, $CE = c$; adeoque est $BE = c \sim b$, differentiam duarum BC, CE; (supponimus enim, tum FE, tum DE, cadere supra rectam ap; adeoque quoties DE cadit infra rectam aCp, reputanda est eo casu CE quantitas negativa; sive quod eodem redibit, erit $BE = c \mp b$; quod tamen calculum non turbabit.

Cum autem in triangulis DBE, FBE, dentur omnes anguli, (nempe propter datum ad B, & rectum vel saltem datum ad E,) habetur ratio laterum ad invicem; (ea nempe quæ est sinuum oppositorum;) puta BE, ad DE (vel FE) ut n ad m. Adeoque cum sit $BE = c \sim b$, & DE (vel FE) $= g$; Erit $n . m :: c \sim b . a = \frac{c \sim b}{n} m$. Et $aa = \frac{cc + bb - 2cb}{nn} mm$.

Porro, cum, in Ellipsi, ordinatim-applicata DE vel FE, sit, vel media proportionalis inter diametri segmenta AE, EP (si nempe $aC = AC$,) vel saltem ut aC ad AC, sic ordinatim-applicata ad illam mediam proportionalem; (adeoque & quadrata quadratis proportionalia;) Erit, ut $AC = d$ ad $aG = \delta$, sic $\sqrt{:} AE \times EP =$; ad DE (vel FE) $= a$. Et $dd . \delta\delta :: AE \times EP . aa$.

Est autem $AE \times EP$; $= \frac{1}{2} AP - CE$, in $\frac{1}{2} AP + CE$; $= d - c$, in $d + c$; $= dd - cc$.

Ergo $dd . \delta\delta :: dd - cc . \frac{dd - cc}{\delta\delta} \delta\delta = aa$.

quoniam igitur $\frac{dd - cc}{dd} \delta\delta = aa = \frac{cc + bb - 2cb}{nn} mm$.

Erit $dd\delta\delta nn - cc\delta\delta nn = ccddnn + bbddmm - 2cbddmm$;

Et $mmbbdd - nndd\delta\delta = 2mm2bbddc - mmddcc - nn\delta\delta cc$.

Et $\frac{mmbbdd - nndd\delta\delta}{mmdd + nn\delta\delta} = \frac{2mmbbdd}{mmdd + nn\delta\delta} c - cc$.

Et resolvendo æquationem)

$$\frac{mmbdd \pm nd\delta \sqrt{:} mmdd + nn\delta\delta - mm}{mmdd + nndd} = c = GE.$$

Ubi notandum est, quod quantitatum sic ambigue designatarum, (per signa $\pm$,) major (quam respicit signum +) denotat *C E* distantiam puncti *E* remotioris à centro; minor autem (quam respicit signum −) *C E* distantiam puncti *E* propioris, quod quidem supra centrum versus *B* situm est (prout supponitur) si quantitas prodeat affirmativa, nempe si $m^2 bd^2$ major sit quam $nd\delta\ \sqrt{:}\ m^2 d^2 + n^2 \delta^2 - m^2 b^2 :$ vel ultra centrum si minor sit, adeoque quantitas prodeat negativa; vel denique, si, propter earundem æqualitatem, se mutuo destruant, adeoque evanescat quantitas, erit illud E in ipso centro. Sed & porro, (quod quandoque obtinget ubi *B* sumitur extra ellipsim) si quādo $mmbb$ major sit quā $mm\ dd + nn\ \delta\delta$, adeoq; æquatio evadat impossibilis; argumentum est, rectam in dato angulo, productæ diametro in dato *B* puncto occurrentē, ellipsin intactam præterire, ipsaque puncta D, *F*, nusquam esse; sin æquales sint, se mutuo periment $mm\ bb$ & $mm\ dd + nn\ \delta\delta$, rectaque sic ducta ellipsim tanget quidem sed non secabit, punctis D F coincidentibus. Quæ omnia, Æquationum naturam callentibus, satis obvia sunt, ut non sit opus ea fusius explicare.

Habitis autem punctis tum *B* dato, tum invento E, habetur *B* E latus trianguli D *B* E vel *F B* E, adeoque & (cognitis ut dictum est omnibus angulis) latus *B* D, vel *B F*; (nempe, ut sinus anguli D vel *F*, ad sinum anguli E; sic *B* E, ad *B* D vel *BF*) quod erat inquirendum.

Atque hæc sunt insignissime Domine, quæ, ut mandatis tuis obtemperem, exhibere oportuit,

Maii 11. 1658.

Tuique & mandatorum tuorum observantissimum,

Joh. Wallis.

EPISTOLA XLI.

D. Kenelmi Digby ad D. Th. White.

Most honoured Sir,

I Humbly thank you for yours of the fifth of *April*: And I assure you I have been much delighted with those you then sent me from my Lord *Brouncker* and Dr. *Wallis*. They have now shewed themselves effectively (both of them) very great persons. It hath happened some of the ablest Mathematicians here have been with me since I received their letters; which I shewed them, and they now look upon them with great veneration. Indeed it hath been Monf. *Frenicle* that hath occasioned their coming to me, to see those letters of theirs that he speaketh so highly in commendation of; for, though he would not let any body see what he wrote in reprehension, yet he divulgeth to all the world what he speaketh in praise, which I take to be an argument of a noble mind. I leave open my packet to Dr. *Wallis*, that you may read it, and then impart it to my Lord *Brouncker*, whom, after reading the contents, I beseech to seal and speed it away to the Doctor. I wrote by the last post to his Lordship, therefore will not presume to trouble him again with a particular letter to himself, but beseech you to present my humble service to him. Truly these last letters from his Lordship and the Doctor hath wrought a mighty change in mens opinions of them. They are now looked upon as the greatest Mathematicians of the Age: And let me tell you this in particular, I asked M. *Frenicle* how he was weighed ....in the scale against either of these, he presently replyed there was no weighing of them together; for he was but as a slight Scholar in respect of them, the greatest Masters of the Age. I will hold you no longer at present, but rest

Paris May 8. 1648.

Your most humble

and most affectionate servant

KENELME DIGBY.

EPISTOLA XLIII.

D. Frenicli ad D. Kenelmum Digby.

PErlegi quas ad me transmisisti postremas Mart. 4. & 15. Clar. Wallisii Epistolas, Eques illustrissime & honoratissime; quibus mihi clare innotuit quantum nunc ipse Wallisius in Mathematicis disciplinis profecerit; sed suspensus hæret animus dum inquiro quid moverit virum eruditissimum, vel quid causæ ipsi fuerit ut tamdiu nobis ignotus esse voluerit, præsertim cum ipsius muneris sit, & officii scientias notas facere. Fateor aliquantum in ipso deceptus sum; sed siquid deliqui non mihi sed ipsimet est imputandum. Qualis apparuit, tale judicium sortitus est; quamquam non æquo animo, sed renitenti, quando ipsi dedecori fuit, illud protulerim. Idcirco quamdiu reprehensionibus fuit locus, noluissem ex me ipsas provenire manifestum fieri, & delitescens non dato nomine pro monitionibus potius, quam pro reprehensionibus sumi optassem; non ego volebam videri, quamquam tunc non immerito, reprehendisse virum Clariss.. Ast modo quandoquidem ad approbationes transeundum est, non jam occulte, neque renitens, sed palam & gaudens spectante tota literatorum turma ego ipse, nominatim apparebo. De somniante Wallisio judicium dederam, nunc autem de vigilante sensum lubens aperiam, Herculem ante videram, sed cum puellis jocantem, nunc eundem intueor hidram & monstra debellantem: levia scilicet primum & puerilia sectantem, sed ardua demum & gigantea promentem. Ad clarissimum Schotenium quidem peculiariter spectabant de cubis suis partibus addendis proposita problemata, sed antevertit vir perspicacissimus; in his certe vires suas probare, non in minutissimis rebus, in his & similibus sese exercere debuit Vir Clar. & Atlanti virtute persimilis.

Cedat jam Angliæ Batavia, & ipsius Lugdunum Oxonio; quamquam Galliæ Narbonensis & Celtica cum Kentio, & Oxoniensi Britannicis de palma decertare, & paribus forsitan viribus possent contendere, ne dicam majoribus non enim meum

est tale judicium ferre, sed aliis relinquendum, quamquam huc-usque pugna non æqua fuit; neque pari eventu decertatum.

Cæterum ignoscat rogo Clar. vir si quædam liberius quam decuit de ipso scripserim. Tu nosti quidnam ad me ista impulerit, non ad conviciis & objurgationibus eum afficiendum, neque ad ipsius gloriæ quidquam detrahendum, binas enim Epistolas de quibus conqueritur occultas tenui, & amicis etiam negavi eas expostulantibus, & solum *Wallisium* si possibile fuisset ipsas perlegisse concupissem; tu nosti inquam me solummodo ad ipsum stimulandum fecisse, ut quid in ipso virtutis esset aliquo modo comprobare possem, & certe melius probassem, si cubos ante acceptos in opusculo latino à me tibi vir Nobilissime dedicato solutiones tradidisset, id est absque cujusquam auxilio; non desunt enim qui suspicentur, & dicant quod cum in illis reperiendis invigilaverit Clar. *Wallisius* & labor ipsius non successerit ut saltem aliquid qualecumque illud foret impertiretur unitatem pro cubo & quadrato, numeris qui quæstionem perfecte solverent deficientibus, pro solutione protulerit; satis enim fuit (aiunt) viro perspicaci per viam apertam & iter tritum & complanatum incedere potuisse, cum ipsi licuerit datorum cuborum partes cubicas, & eorumdem cuborum partialium summæ partes inspicere; & inde haud ita difficile fuisse suam methodum fabricare confabulentur: (quod quidem non sit dictum quasi aliquid ex gloria ipsi debita detrahere, aut imminuere velim) & quidem ista non omnino rationi apparent absona, unde conjiciunt meum opusculum non parum illi profuisse in adinvenienda sua methodo, sed id quod in meis Epistolis ipsi Wallisio contrarium & nocivum apparuit in ejus abiit emolumentum, nisi enim puncturis quasi stimulis eum appetissem, & si unitatem suam approbassem forsitan sua solutione contentus, nihil ultra fuisset aggressus. Nihil igitur me ultra jam incuset vir Clar. cum ei non parum ipsum arguendo conduxerim, ut cunctis etiam literatis; & me potius de illo & de cœteris benemeritum esse fateatur, quod cum præclaram lucem possideret Oxonium, & non minorem Londinum quamquam nobis adhuc nebulis tectam, eas veluti cavillationibus, veluti procellis quibusdam abegerim. Interim non credat Clar.

Wallisius

Wallisius me cujusquam gloriæ invidere, nec gentem aliquam, tuam præsertim, despicatui habere (virtutem veneror ubicumq; fuerit) imo Angliam tuam etiam olim à me visam speciali semper benevolentia prosecutus sum & prosequor: quinimo lætitia magna sum affectus, quod tandē me cum quibusdam aliis deceptum deprehenderim; quamquam tantisper indignatione commotus quod tandiu vires suas nobis abscondere voluerit; neque etiam existimet vir Clar. me tanti mea facere, quin ea potius ut plurimum parvipendo, quo fit ut ista in aliis qui hisce operam dant non reperiri stupeam & si longe aberrent erubescam. Sed de his satis sic; nunc ad ea quæ scientiam spectant accedamus.

Doleo cur Clar. Vir unitatem adhuc pro legitima solutione nobis ingerat, & attendere nolit quod si unitas, ut sæpius inculcavi, nullas habet partes certe suis partibus jungi nequit, unitas inquit est cubus qui additus suis partibus aliquotis quippe nullis, manet adhuc 1. qui est quadratus. Respondeo. Si unitas suis partibus addi potest, certe aliquibus; si vero nullis, quomodo quibusdam? Miror quonam pacto vir perspicacissimus in contradictione tam manifesta hæreat: præsertim cum de numeris non de irrationalibus hic agatur: si nolit admittere, quiete sua perfruatur nihil amplius ego circa istud eloquar. Omissis igitur istis vanis & nullius momenti contentionibus, ad defensionem circa quæ mihi objicit vir Clar. me accingam, & breviter ostendam me potuisse unitatem, cubum & quadratum, ut etiam numerum nuncupare, nec tamen ideo me veluti tirannidem quamdam in ipsum exercuisse quasi eadem ipsi non licere vellem. Unitatem pro cubo & quadrato ab omnibus assumi non inficias ibo, sed de hoc non agitur, & nunquam negatum est; eam autem pro numero sumi posse non conceditur, ut etiam numeri nuncupationem sortiri posse, cum solitaria est, contenditur quamquam brevitatis causa quando cum numero aliquo vel numeris reperitur, numeros in plurali, quam cum circumloctione, tales numeros cum unitate satius sit enunciare. Nunc ad ea quæ partes aliquotas spectant properandum. In his quæ de partibus aliquotis attuli propositum mihi solummodo fuit indicare partes aliquotas haud proprie multitudine terminatas, sed infinitas, seu indefinitas fractis tribuendas esse, & ideo minime admitten-

id solum requiritur, ut inveniantur duo cubi quorum aggregatum sit cubi noncuplum, (quod, inspecta numerorum cuborum tabella, atq; adhibitis quæ viro exercitato se sponte offerent calculi compendiis, & qualia ad Fermatij Problema tertium jam antehac adhibuimus, non magna difficultate exquirentur, si cui libeat calculum instituere;) quippe Cubi illi, per hunc divisi, numerum exhibebunt $9 = 8 + 1$. Et pari methodo procedendum erit, quæcunq; alia exponatur cuborum exquirendorum sive summa sive differentia possibilis.

Ad alterum vero ubi exponit Theorema demonstrandum, nempe, *Nullum in numeris esse Triangulum rectangulum, cujus area sit numerus quadratus.* Id sic demonstro. In exposito schemate (cujus constructio patet) Trianguli rectanguli B C D latera non possunt esse numeris effabilia, nisi AD DE sint inter se ut numeri plani similes (secus enim, qui ab ipsis fit, non erit numerus quadratus) ejusq; radix BD effabilis hoc est, ut numeri quadrati inter se. Esto ut $2aa$, $2ee$.

A C D E B

Erunt igitur CB, CD, BD, ut $aa + ee$, $aa - ee$, $2ae$. Adeoq; CD, ½ BD, ut $aa - ee$, ae. Et proinde (cum duorum quadratorum differentia, atq; eorundem medius proportionalis, non possint esse plani similes) qui ab ipsis fit (hoc est area trianguli) non potest esse numerus quadratus. Quod erat demonstrandum.

Quid autem, de numeris nostris literis sentiat Fermatius, nondum audio; de reliquis enim post eas Nov. 12. datas, omnibus plane altum silentium.

Ad postremas vero tuas literas; cum Freniclei inclusis, nihil ultra lubet præter gratias reponere, &c.

ut hisce tandem disceptationibus modum imponam, quo saltem & finem imponamus molestiis tuis, quem omino nimis hactenus fatigavimus; Cujus deniq; veniam supplex oro,

Eques Illustrissime,

Humillimo, obsequentissimo, & devinctissimo servo,

Oxonij. Janij 20. 1658.

JOH. WALLIS.

Errata sic emendaetur.

PAg. 11. l. 13, four. p. 21. l. 7. aiment. p. 39. l. 20. quadratorum. p 42. l. 24. aggrederemur. p. 47. l. 1. quotlibet, p. 48. l. 24. dele à. p. 50. l. 15. seriem. l. 22. tat. p. 53. l. 31. sed utrinq; p. 55. 21. rectis p. 56 l. 7. ex applicatis. p. 56. l. 30. alius. p. 65. l. 11. ce $\overline{+}$ √ nee + b². ibid. add. + b l. 14 add + b. l. pen quæratur. p. 67. l. 12. metuerem. p. 77. l. 11. 4hh. inter l. 14. & 15. 4hj + 3j² + 1 = 3hh. p. 80. l. 10. per numerum l. 13. imperatam. p. 87. l. 2. 851525. p. 88. l. ult. 2 h + j. p. 90. l. 10. 3.) 2 × 2 ײ (12. l. 32. literarium p. 100. l. 25. utriq; p. 101 l. 14. $\frac{1}{1}$. l. 31. Problematis p. 102. l. pen. numeros. p. 106. l. 7. numeri. p. 103. l. 28. autem p. 111. l. ult. enim arcus A E. p. 112. l. 9. FAc - FEc p. 122. l. 17. Kenelmum. p. 126. l. antep. si aliud p. 144. l. 16. calculus p. 164. l. 17. quin.



FINIS.



APPENDIX
ad Literas præcedentes.

EPIST. XLV.
D. Joh. Wallis *ad D.* Vicecom. Brouncker.

Illustrissime Domine,

POstquam præcedentes literas absolverat prelum, & cœperant divulgari, accepi hodie, à Te transmissas, Illustrissimi Equitis Digbæi literas, Junii 19 datas, unà cum inclusis D de Fermat. Quas autem memorat 25 Maii datas periisse autumo (& siquid secum ferebant) ad me saltem hactenus non pervenerunt. Quas autem jam accepi, propter elegantes non paucas Fermatii propositiones, & se dignas, prelo statim atque accepi subjeci, ut reliquis Appendicis loco subjiciantur; in iis saltem exemplaribus quæ nondum distrahuntur: Tum ut tanti ingenii specimina & summo viro digna publice innotescant, tum ut alii mecum à Clarissimo Viro exigant quæ publicâ luce digna apud se hactenus premit. Cum enim summum eum in hisce rebus virum esse abunde constet, atque in quæstionibus numerosis quas plerique hactenus neglexerunt peculiarem impendisse operam, aliaque insuper multa in Geometricis mirâ subtilitate investigâsse; non permittendum esse videtur ut ea sibi soli suisq; retineat omnia, quę literato orbi fore pergratissima non erit dubitandum. qua in re tum Dominationem vestram à me neutiquam dissentire confido, tum nec in reddendis gratiis pro ea qua nos humanitate accepit, atque est dignatus elogio, quale & & sibi vicissim lubentes rependimus. Responsum autem ad hæc vel omittendum plane erit, vel saltem differendum; cum jam vix perlegendi copia detur antequam mandentur prelo, unde jam præcedentia erepserunt. Quæ jam ipse exequutus est, non erit necesse ut nos actum agendo iterum inquiramus; ubi adhuc hæret, si opera nostra sibi usui esse possit, non hanc gravabimur impertire. Atque hæc quidem ubi raptim dixerim, id saltem superest, ut me profitear,

Oxonii Julii 3.
1658. St. vet.

Illustrissime Domine,
Observantissimum Tui, atque
obsequentissimum,
Joh. Wallis.

EPISTOLA XLVI.

D. Kenelmi Digby *ad* D. Joh. Wallis.

Noble Sir,

I Received lately from Monf. *Fermat*, the enclofed written paper, with a defire from him to conveigh it to my Lord *Brounker* and your felf. I hope you have received mine of the 8. and 25 of *May*. A main errand of this prefent Letter is humbly to take my leave of you for fome months; for I am ere long going a journey that will take up all this fummer at the leaft. When I return to *Paris*, I will give you account of it by prefenting my humble refpects unto you. In the mean time I ceafe further troubling you, and remain

Paris 19 *June* 1658.

Noble Sir,

Your moft humble and moft obedient fervant, that highly honoureth you,

KENELM DIGBY.

EPISTOLA XLVII.

D, Fermatii *ad* D. Kenelmum Digby. *praecedenti inclufa*.

ILluftriffimos Viros Vicecomitem Brouncker & Johannem Wallifium quæftionum numericarum à me propofitarum folutiones tandem dediffe legitimas libens agnofco imò & gaudeo. Noluerunt Viri Clariffimi vel unico momento impares fefe aut ἥττονας quæftionibus propofitis confiteri; mallem ipfos & quæftiones dignas laboribus Anglicis ftatim agnoviffe, & poftquam adepti ipfarum folutiones fuiffent triumphum eo illuftriorem egiffe quo certamen magis arduum apparuiffet. Contrarium ipfis vifum eft. Id fanè gloriæ Illuftriffimæ & Ingeniofiffimæ nationis condonandum. Verùm ut deinceps ingenue

genue utrimque agamus, fatentur Galli propositis quæstionibus satisfecisse Anglos: Sed fateantur vicissim Angli quæstiones ipsas dignas fuisse quæ ipsis proponerentur, nec dedignentur in posterum numerorum integrorum naturam accuratius examinare & introspicere, imo & doctrinam istam, quâ pollent ingenii vi & subtilitate, propagare. Quod ut ab illis libentius impetremus, Diophantum ipsum & celeberrimum illius interpretem Bachetum ad authoritatem rei proponimus. Supponit Diophantus in plerisque libri 4^i & 5^i quæstionibus numerum omnem integrum vel esse quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compositum. Id sibi Bachetus in commentariis ad quæstionem 31^{am} libri 4^i perfecta demonstratione assequi nondum licuisse fatetur. Id Renatus ipse Descartes incognitum sibi ingenuè declarat in Epistola quadam quam propediem edendam accepimus, imò & viam quâ huc perveniatur difficillimam & abstrusissimam esse non diffitetur. Cur igitur de propositionis illius dignitate dubitemus, non video. Ejus tamen perfectam demonstrationem à me inventam moneo viros clarissimos. Possem & plerasque adjungere propositiones non solum celeberrimas sed & firmissimis demonstrationibus probatas. Exempli causa.

Omnis numerus primus qui unitate superat quaternarii multiplicem est compositus ex duobus quadratis. Hujusmodi sunt 5. 13. 17. 29. 37. 41. &c. Omnis numerus primus qui unitate superat ternarii multiplicem est compositus ex quadrato & triplo alterius quadrati, tales sunt 7. 13. 19. 31. 37. 43. &c. Omnis numerus primus qui vel unitate vel ternario superat octonarii multiplicem componitur ex quadrato & duplo alterius quadrati, tales sunt 3. 11. 17. 19. 41. 43. &c.

Sed & præcedentem Bacheti propositionem generaliter olim Domino de Saint Croise proposuimus, ejusque demonstrationem non ignoramus.

Omnis numerus integer vel est triangulus, vel ex duobus, aut tribus triangulis compositus.

Est quadratus vel ex duobus, tribus, aut quatuor quadratis compositus.

" Est pentagonus vel ex duobus, tribus, quatuor, aut quinque pentagonis compositus.

Est hexagonus vel ex duobus, tribus, quatuor, quinque vel sex hexagonis compositus.

Et sic uniformi in infinitum enunciatione.

Hæc omnia & alia infinita quæ ad numeros integros spectant quæque à nobis & inventa & generaliter demonstrata sunt possemus & proponere viris Clarissimis & proponendo negotium saltem aliquod ipsis facescere. Sed ingenuitatem Gallicam sapient magis propositiones aliquot quarum demonstrationem à nobis ignorari non defficemur, licet de earum veritate nobis constet. Meminimus Archimedem non dedignatum propositionibus Cononis, veris quidem, sed tamen indemonstratis, ultimam manum imponere, earumque veritatem demonstrationibus illis subtilissimis confirmare. Cur igitur simile auxilium à viris Clarissimis non expectem, Conon scilicet Gallicus ab Archimedibus Anglis?

1 Potestates omnes numeri 2, quarum exponentes sunt termini progressionis Geometricæ ejusdem numeri 2, unitate auctæ sunt numeri primi.

Exponatur progressio Geometrica 2. cum suis exponentibus.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	8	16	32	64	128	256.

Primus terminus 2. auctus unitate facit 3. qui est numerus primus. Secundus terminus 4. auctus unitate facit 5. qui est pariter numerus primus. Quartus terminus 16 auctus unitate facit 17 numerũ primũ. Octavus terminus 256. auctus unitate facit 257. numerum primum. Sume generaliter omnes potestates 2. quarum exponentes sunt numeri progressionis, idem accidet, Nam si sumas deinde decimum sextum terminum qui est 65536. ille auctus faciet 65537. numerum primum Hoc pacto potest dari & assignari nullo negotio numerus primus dato quocumque numero major. Quæritur demonstratio illius propositionis, pulchræ sane sed & verissimæ, cujus ope, ut jam diximus, problema alias difficillimum solvi statim potest. Dato quovis numero invenire numerum primum dato numero majorem. Hujus

jus clavis beneficio referabunt fortaffe Viri clariffimi myfterium omne de numeris primis, hoc eft Dato numero quovis invenire via breviffima & facillima an fit primus vel compofitus.

2. Deinde. Duplũ cujuflibet numeri primi vnitate minoris quã multiplex octonarii componitur ex tribus quadratis Efto quilibet numerus primus unitate minor quam octonarii multiplex (ut funt 7. 23. 31. 47. &c) eorum duplum eft 14. 46. 62. 94. componitur ex tribus quadratis. Propofitionem illam veram afferimus, fed Cononis modo nondum aut afferente aut demonftrante Archimede.

3. Si duo numeri primi defінentes aut in 3. aut in 7. & quaternarii multiplicem ternario fuperantes inter fe ducantur. Productum componitur ex quadrato & quintuplo alterius quadrati. Tales funt numeri 3.7. 23. 43. 47. 67. &c. Sume duos ex illis exempli gratia 7. & 23. quod fub iis fit 161. componetur ex quadrato & quintuplo alterius quadrati, nam 81. quadratus & quintuplum 16. æquantur 161. Id verum afferimus generaliter, & demonftrationem tantum expectamus. Singulorum autem ex ipfis quadrati componuntur ex quadrato & quintuplo alterius quadrati, quod & demonftrandum proponitur.

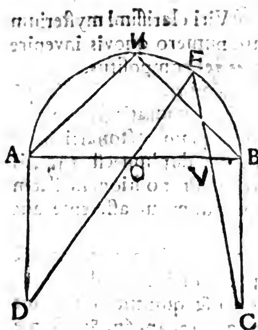
Sed ne demonftrationibus nimium fortaffe deeffe videamur, fequentem propofitionem & afferimus & poffumus demonftrare.

Nullus numerus triangulus præter unitatem æquatur numero quadrato quadrato.

Sint trianguli ut norunt omnes 1. 3. 10. 15. 21. 28. 36. 45, &c. Nullus omnino facta in infinitum progreffione præter folam unitatem erit quadrato quadratus.

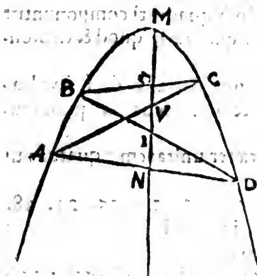
Ne autem ad numeros integros deficiente Geometria videamur confugiffe en aliquot propofitiones Geometricas, quæ Angliam invifere non erubefcent. Priores duas ex reftituta à nobis porifmatum Euclidæorum Geometria excerpfimus.

Efto



Esto semicirculus ANB super diametro AB. bisecetur in N semicircumferentia ANB & junctis NA, NB, à punctis A & B excitentur perpendiculares AD, BC. ipsis AN, NB, æquales. Sumpto quolibet in semicircumferentia puncto, ut E; junctis rectis DE, EC, occurrentibus diametro in punctis O & V. aio, Duo quadrata AV, BO, simul sumpta, esse in omni casu æqualia quadrato diametri AB.

Generalius in tractatu nostro hoc problema aut theorema proponebamus sed in præsens speciale hoc sufficit.



Esto parabole quævis AMC. in qua sumantur duo quælibet puncta A & B. & diameter quævis MN. sumatur quodcumque aliud punctum in parabole ut C. à quo ad puncta A & B, jungantur rectæ diametrum secantes. In eadem semper ratione secabitur diameter. Nam sumpto alio quovis puncto D erit MO ad OV, ut MI ad IN. Et semper similes abscissæ à diametro, in eadē erunt ratione.

Hæc à nobis & inventa sunt & demonstrata; quæ ἀμοιβαίως pro theoremate Frusti Conici offerimus.

Sed & quæ nondum ex omni parte completa sunt, tentanda Anglis proponere non dubitamus.

Datis punctis rectis aut circulis invenire parabolem quæ per data puncta transeat & datas rectas aut circulos contingat.

Dari autem quatuor ex istis sufficit. Exempli gratiâ datis duobus punctis recta & circulo invenire parabolem quæ per data

data puncta transeat & rectam circulumque datos contingat. Unde emergunt 15 problemata.

In Ellipsi aut hyperbolâ idem proponatur. Sed eo casu debent dari quinque aut puncta aut rectæ aut circuli, aut quædam ex istis numero quinque, & inde emergunt 21 problemata.

Nos olim in tractatu de contactibus sphæricis similia in sphærâ expedivimus. Et tandem feliciter problema sequens construximus.

Datis quatuor sphæris, invenire quartam quæ quatuor datas contingat. Tractatum integrum penes Dominum de Carcavi invenies.

Monemus tantum Viros Clarissimos ut sepositis tantisper speciebus analyseos problemata Geometrica viâ Euclideanâ & Apolloniana exequantur, ne pereat paulatim elegantia & construendi & demonstrandi, cui præcipuè operam dedisse veteres innuunt satis & data Euclidis, & alii à Pappo enumerati analyseos libri: quos omni ex parte jam olim supplevimus dum operibus Vietæ, Ghetaldi, Snellii, tractatus nostros de locis planis, de locis solidis & linearibus, de locis ad superficiem, & de porismatibus adjecimus: quos omnes habet dictus Dominus de Carcavi.

ERRATA.

ERRATA.

Cum propter necessariam meam à prelo absentiam dum aliquot ex postremis foliis imprimerentur, errata plura quam velim irrepserint (& quidem in ipso præcedente erratorum catalogo;) minora, quæ sensum non turbant, tum hic tum alibi (spero) facilè condonabit Lector; quæ vero adhuc alicujus momenti videantur, sic emendet.

p. 170. l. 6. $CD = c$. l. 10. $r^2 - c^2$. l. 12. $c + p$. l. ult. *& eædem*. p. 173. l. 1. *Et ponamus*. l. 3. *differentia* l. 11. *sinuum oppositorum angulorum*. l. 12. $FE) = a$. l. 23. (*subtus*) *dd*. l. 25. *ccddmm*. l. 26. *2mmbddc*. l. 28. *2 mmbdd*. l. 30. + *nnδδ—mmbb*. p. 176. l. 5. *me ad ista*. l. 13. *acceptas*. p. 178. l. 24. 343. p. 179. l. 13. dele 13. l. 15. 7, q 13. l. ult. *Bessy*. p. 181. l. 18, 19. *quadratus, ejusque radix* BD *effabilis*) *hoc est*. l. 27. *nuperis*. l. 28. *Nov*. 21. l. 33. *nimio nimis*. l. pen. *Iunii*. p. 182. l. 6. [*p*. 72. *l*. 11.] l. 9. [2×9] l. 10. [*p* 109. l. 28.] *p*. 169. *l*. 1. *tiones conspectantes*.





FINIS.

n dum
plura
dente
ant,
; que

m. p.
ngu-
26:
ne.d
.15.
Fabi-
nii.
l.Ii



